به نام خدا نام و نام خانوادگی: **مجتمع آموزشی نداي کوثر(دوره دوم)** پایه: دوازدهم رشته: ریاضی سؤال امتحان درس: ریاضیات گسسته	ساعت امتحان: صبح وقت امتحان: ۹۰ دقیقه تاریخ امتحان: تعداد 23 /10/ 1403

برگهٔ سؤال: ۲ برگ

۴- گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید. — ۱/۵

الف) اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، آنگاه $\alpha-\beta$ گویا است.

ب) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، آنگاه a^2+b^2 زوج است.

۲- ثابت کنید: حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است. — ۱/۵

۳- برای دو عدد حقیقی x و y نشان دهید: $x^2+y^2+1\geq xy+x+y$ — ۱/۵

۴- اگر $n\in N$ و $n\mid 9k+7$ و $n\mid 7k+6$ ثابت کنید $n=1$ یا $n=5$. — ۲

۵- ثابت کنید اگر $p>3$ عددی اول باشد؛ آنگاه به یکی از دو صورت $p=6k+1$ یا $p=6k+5$ $(k\in W)$ نوشته می‌شود. — ۱/۵

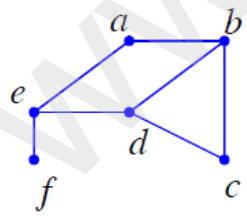
۶- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $2m-5n$ بر **۱۷** را بیابید. — ۲

۷- اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد، در این صورت با استفاده از هم‌نهشتی تعیین کنید ۲۱ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟ — ۱/۵

۸- ثابت کنید می‌توان دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد. به عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح a، b و c و عدد طبیعی m، اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ آنگاه $ac\overset{m}{\equiv}bc$. — ۲

۹- معادلهٔ سیالهٔ خطی $2000x+5000y=29000$ ، در مجموعهٔ اعداد طبیعی چند جواب دارد؟ — ۱/۵

۱۰- شکل مقابل نمودار گراف G می‌باشد. — ۱



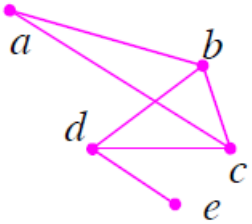
الف) مرتبه و اندازهٔ گراف G را بنویسید.

ب) مجموعهٔ $N_G(b)$ را بنویسید.

پ) مجموع درجه‌های رأس‌های گراف $\bar{G}$ را مشخص کنید.

ت) تعداد مسیرهای موجود بین دو رأس e و c ؟

۱۱- گراف G را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید: — ۱



الف) مجموعهٔ رئوس و مجموعهٔ یال‌ها را بنویسید.

ب) درجهٔ رأس e را در گراف $\bar{G}$ مشخص کنید.

www-kanoon.ir

۱۲- در گراف G، درجه رأس v برابر ۹ است و درجه رأس v در گراف $\overline{G}$ برابر ۱۲ است. مرتبهٔ گراف G را مشخص کنید.	۱
۱۳- گراف G، ۳- منتظم است و اندازهٔ آن ۳ واحد کمتر از ۲ برابر تعداد رأس‌های گراف است. مرتبهٔ گراف را به دست آورده و گراف G را رسم کنید.	۱
۱۴- جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید. الف) مرتبهٔ گراف نشان‌دهندهٔ تعداد ..... گراف می‌باشد. ب) اگر یک یال، رأسی را به خود آن رأس وصل کند، این یال را ..... می‌نامیم. پ) دو یال را ..... می‌نامیم، هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هردوی آن‌ها را به هم متصل کند. ت) تعداد رأس‌های فرد هر گراف عددی ..... است.	۱

www-kanoon-ir

الف: نادرست

مثال نقض: $\alpha = \sqrt{۲}$ ، $\beta = -\sqrt{۲}$ $\rightarrow \alpha + \beta = ۰$ ؛ $\alpha - \beta = ۲\sqrt{۲}$ گویا است.

ب: درست $ab =$ فرد $\rightarrow a = ۲k+۱$ ، $b = ۲k'+۱$

$$a^۲ + b^۲ = (۲k+۱)^۲ + (۲k'+۱)^۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ + ۴k'^۲ + ۴k' + ۱$$

$$= ۲\underbrace{(۲k^۲ + ۲k + ۲k'^۲ + ۲k' + ۱)}_{t} = ۲t \rightarrow \text{زوج}$$

۲- $(n-۱)\,n\,(n+۱)$

$n = ۴k \rightarrow (۴k-۱)\,۴k\,(۴k+۱) = ۴t_۱$

$n = ۴k+۱ \rightarrow (۴k)\,(۴k+۱)\,(۴k+۲) = ۴t_۲$

$n = ۴k+۲ \rightarrow (۴k+۱)\,\underbrace{(۴k+۲)}_{۲q}\,\underbrace{(۴k+۳)}_{۳q'} = ۴t_۳$

$n = ۴k+۳ \rightarrow \underbrace{(۴k+۲)}_{۲q_۱}\,\underbrace{(۴k+۳)}_{۳q'_۱}\,(۴k+۴) = ۴t_۴$

$n = ۴k+۴ \rightarrow \underbrace{(۴k+۳)}_{۳q_۲}\,\underbrace{(۴k+۴)}_{۲q'_۲}\,\underbrace{(۴k+۵)}_{۵q_۲} = ۴t_۵$

$n = ۴k+۵ \rightarrow (۴k+۴)\,(۴k+۵)\,(۴k+۶) = ۴t_۶$

۳- $x^۲ + y^۲ + ۱ \geq xy + x + y \xleftrightarrow{\times ۲} ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲ - ۲xy - ۲x - ۲y \geq ۰$

$$\leftrightarrow (x^۲ - ۲xy + y^۲) + (x^۲ - ۲x + ۱) + (y^۲ - ۲y + ۱) \geq ۰$$

$$\leftrightarrow (x-y)^۲ + (x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ \geq ۰ \rightarrow \text{بدیهی است}$$

۴- $n \mid (۹k+۷) \times ۷ \rightarrow n \mid ۶۳k + ۴۹$

$n \mid (۷k+۹) \times ۹ \rightarrow n \mid ۶۳k + ۸۱$ $\xrightarrow{\text{تفاضل}} n \mid ۶۳k + ۸۱ - ۶۳k - ۴۹$

$\Rightarrow n \mid ۳۲ \rightarrow n = ۱$ یا $n = ۳۲$

www.kanoon.ir

۵ - اعداد های تقسیم بر ۶ را می نویسیم :

$6k$, $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$, $6k+5$

$6k$ ← ضرب ۶ است
$6k+1$ ✓
$6k+2$ ← ضرب ۲ است
$6k+3$ ← ضرب ۳ است
$6k+4$ ← ضرب ۲ است
$6k+5$ ✓

---

۶ -

$m = 17q + 5 \rightarrow 2m = 2 \times 17q + 10$

$n = 17q' + 3 \rightarrow 5n = 5 \times 17q' + 15$

$\Rightarrow 2m - 5n = 17(2q - 5q') - \underbrace{5 + 17 - 17}_{12}$

$\Rightarrow 2m - 5n = 17\underbrace{(2q - 5q' - 1)}_{t} + 12 = 17t + 12$

---

۷ -

اول مهر ← بهمن ۲۱
شنبه ?

$29 + 3 \times 30 + 21 \equiv 1 + 6 + 0 \equiv 0$

۲۱ بهمن هم شنبه است.

---

۸ -

$a \overset{m}{\equiv} b \Longrightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$

$a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow m \mid (a-b) \times c \rightarrow m \mid ac - bc \rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$

www-kanoon-ir

۹ -

$$۲x + ۵y = ۲۹$$

$$۵y \overset{۲}{\equiv} ۲۹ \rightarrow y \overset{۲}{\equiv} ۱ \rightarrow y = ۲K+۱$$

$$۲x + ۵(۲K+۱) = ۲۹ \rightarrow ۲x = -۱۰K + ۲۴ \rightarrow x = -۵K + ۱۲$$

به ازای $K = ۰, ۱, ۲$ مقادیر x, y طبیعی هستند.

---

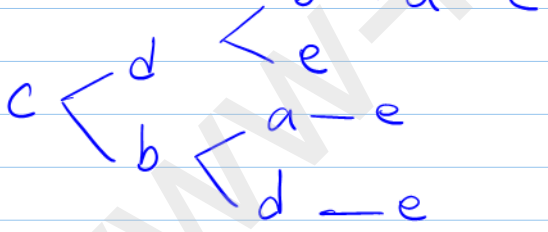
۱۰ - الف) $P = ۶$, $q = ۷$

ب) $N_G(b) = \{a, d, c\}$

ج) $q_G + q_{\bar{G}} = \frac{P(P-۱)}{۲} \rightarrow ۷ + q_{\bar{G}} = \frac{۶ \times ۵}{۲} \rightarrow q_{\bar{G}} = ۸$

$$\sum deg\, v_i = ۲q_{\bar{G}} = ۲ \times ۸ = ۱۶$$

د) ۴ مسیر



---

۱۱ - الف:

$$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E(G) = \{ab, ac, bd, bc, dc, de\}$$

ب:

$$deg_G e + deg_{\bar{G}} e = P - ۱$$

$$۱ + deg_{\bar{G}} e = ۵ - ۱ \rightarrow deg_{\bar{G}} e = ۳$$

www.kanoon.ir

۱۲- $\deg_G v + \deg_{\bar{G}} v = p-1$

$9 + 12 = p-1 \rightarrow p = 22$

۱۳- $\begin{cases} 3p = 2q \\ q = 2p-3 \rightarrow 2q = 4p-6 \end{cases}$ $\longrightarrow$ $3p = 4p-6$

$p = 6$

۱۴- الف) رئوس ب) طرقه پ) مجاور ت) زوج