نام و نام خانوادگی:.....

شماره کلاس:.....

دبیرستان نمونه دانشمند

پایه دوازدهم ریاضی

آزمون: درس گسسته

تاریخ امتحان:

زمان: ۱۰۰ دقیقه

۱- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید: (۱/۵ نمره)

	د	ن
الف- حاصل‌ضرب هر عدد گویا در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.	☐	☐
ب- عدد ۱۴۰۴ به کلاس با دستهٔ هم‌نهشتی ۷ به پیمانهٔ ۱۱ تعلق دارد.	☐	☐
ت- حاصل‌ضرب هر سه عدد طبیعی بر ۶ بخش‌پذیر است.	☐	☐
پ- اگر α, β دو عدد گنگ غیرمساوی باشند، حاصل $\frac{\alpha+\beta}{2\beta}$ عددی گنگ است.	☐	☐
ح- عدد 2^{2^n} به ازای $n = 5$ عددی اول است.	☐	☐
خ- رقم یکان عدد $500! + 400 + 3! + 2! + 1!$ برابر ۳ است	☐	☐

۲- جاهای خالی را با کلمات یا عبارت مناسب تکمیل کنید. (۱/۵ نمره)

الف- اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a, b بر m مساوی باشند، آنگاه ..... .

ب- باقی‌ماندهٔ تقسیم $13^{41} - 12^{41} - 25^{41}$ بر ۱۵۶ عدد ۰۰۰ است

ت- در یک تقسیم اگر مقسوم و مقسوم‌علیه بر n بخش‌پذیر باشند، آنگاه ..... نیز بر n بخش‌پذیر است.

پ- اگر a, b و c اعدادی طبیعی باشند که $a|b$ و $b|c$، در این‌صورت حاصل عبارت $([a,b],[a,c])$ برابر ..... است.

ح- می‌دانیم v یکی از رأس‌های گراف G است. اگر $N_G[v]$ و $N_{\overline{G}}[v]$ به ترتیب ۵ و ۸ عضو باشند. آنگاه مرتبهٔ گراف G برابر ..... است.

خ- تعداد مسیرها به طول ۳ در p_1 برابر ..... است .

۳- برای دو عدد حقیقی x , y نشان دهید: $3x^2 + y^2 \geq 6x - 3$ (۱ نمره)

۴- کدام‌یک از ترکیب‌های دوشرطی زیر به‌ازای اعداد حقیقی x و y برقرار است ؟ (۰/۵ نمره)

۱) $x = y \iff x^3 = y^3$

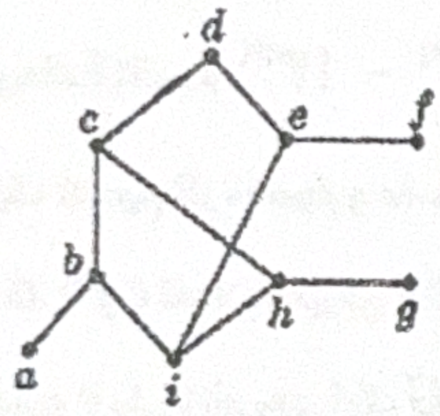
۲) $x < y \iff (x-y)^3 \geq 0$

۳) $x < y < 0 \iff \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

۴) $xy > 0 \iff \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

۵- اگر $2n+1 \mid 5$، ثابت کنید $25 \mid 14n^2 + 19n + 6$ (۱/۵ نمره)

۶- اگر a^2 عدد صحیح فرد بوده و $3b \mid a+4$ باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^2 + 2b^2 - 10$ را بر ۸ به دست آورید. (۱/۵ نمره)

۷- ثابت کنید هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به یکی از صورت‌های $4k+1$ یا $4k+3$ نوشته می‌شود.	۱/۲۵نمره
۸- با استفاده از روابط هم‌نهشتی، باقی‌ماندهٔ تقسیم 7^{30} بر ۱۵ را به دست آورید.	۱/۲۵نمره
۹- اگر $a \overset{m}{\equiv} b, b \overset{n}{\equiv} c, (m,n)=d$ ثابت کنید $a \overset{d}{\equiv} c$.	۱/۵نمره
۱۰- معادلهٔ هم‌نهشتی $13x-5 \overset{9}{\equiv} 5x+9$ را در نظر بگیرید. الف) جواب کلی معادله را به دست آورید. ب) تعداد جواب‌های سه‌رقمی و طبیعی x را محاسبه کنید.	۱/۵نمره
۱۱-اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد پنج رقمی $\overline{23x56}$ بر ۹ برابر ۲ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم آن را بر ۱۱ به کمک قواعد بخش‌پذیری به دست آورید.	۱ نمره
۱۲- در هر گراف از مرتبهٔ فرد، ثابت کنید تعداد رأس‌های زوج، عددی فرد است.	۱ نمره
۱۳- در گراف شکل مقابل: الف) مقدار $q(G)$ چقدر است؟ ب) مجموع درجات رئوس گراف G چند است؟ ج) مجموعهٔ $N_G[h]$ را بنویسید. د) یک دور به طول ۵ بنویسید که شامل رأس b نباشد. ه) یک مسیر به طول ۵ بین b و e بنویسید. و) چند زیرگراف به شکل P_2 وجود دارد؟  	۱/۵نمره
۱۴- با افزودن ۶ یال به یک گراف ۳- منتظم، گرافی کامل به دست می‌آید. الف) مرتبه و اندازهٔ این گراف را تعیین کنید. ب) تعداد دور به طول ۴ در گراف K_4، مشخص کنید.	۱/۵نمره
۱۵- در گراف سادهٔ G داریم $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$، $v_1 \in N_G(v_2)$، $v_3 \in N_G(v_4)$ و $v_5 \in N_G(v_6)$. اگر $\lvert N_G(v_1) \cap N_G(v_2) \rvert = 5$ و به‌ازای $i=3,4,5,6$ همگی $N_G(v_i)$ها دارای ۳ عضو باشند، آنگاه G چند دور با طول ۴ دارد؟ (با ذکر دلیل) ۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶	۱ نمره
۱۶- اگر سوم اردیبهشت سالی پنج‌شنبه باشد، آنگاه کدام‌یک از تاریخ‌های زیر در آن سال سه‌شنبه خواهد بود ؟ (با ذکر دلیل) ۱) ۵ مهر ۲) ۲۰ مهر ۳) ۲۳ مهر ۴) ۲۸ مهر	۱ نمره