نام و نام خانوادگی: شماره آمار: پایه و رشته: ۱۲ ریاضی امتحانات نوبت : اول	بسمه تعالی اداره آموزش و پرورش ناحیه ۳ قم **دبیرستان فرزانگان ۲** (مهر آموزشگاه)	آزمون درس:گسسته تاریخ آزمون : 3 / ۱۰/ ۱۴۰۱ زمان پاسخگویی : ۱۰۰ دقیقه طراح سوال :

وزارت آموزش و پرورش
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

دبیرستان
فرزانگان2

نمره به عدد : نمره به حروف :

1	جاهای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید: الف) حاصل $([72,[48,120])$ برابر است با..... ب) رقم یکان عدد 1393^{1899}برابر.....است. پ) در گراف G با مجموعه رئوس $V=\{a,b,c,d,f\}$ و مجموعه یال های $E=\{ac,ab,bc,bd,af,cf\}$ مجموعه همسایه های باز رأس a برابر است با ..... ت)مجموع درجه های گراف 6 راسی G برابر 12و مجموع درجه های گراف $\bar{G}$ برابر با.....است.	۲
2	الف) ثابت کنید: $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$ ب)ثابت کنید اگر به حاصل ضرب دو عدد فرد متوالی یک واحد اضافه کنیم، حاصل مضرب ۴ است.	۲
3	گزاره های زیر را اثبات و یا با ارایه مثال نقض رد کنید: الف)حاصل ضرب هر عدد گویا در یک عدد گنگ ،عددی گنگ است. ب)اگر p عددی اول و $a\in Z$ و $p\nmid a$ ،آنگاه معادله سیاله $ax+py=19$ ،همواره دارای جواب است. پ) مربع هر عدد فرد به صورت 8q+1 است.	2/25
4	در یک تقسیم اگر به مقسوم ۸۸ واحدو به مقسوم علیه ۱۰واحد اضافه کنیم از باقی مانده ۲ واحد کم و خارج قسمت تغییری نمی کند خارج قسمت را به دست آورید.	۱/۵
5	ثابت کنید $29\mid 2^{90}+5^{90}$	۱/۵

6	۲۰ کیلوگرم شکر را می خواهیم در بسته های ۳ کیلویی و ۲ کیلویی بسته بندی کنیم تمام حالت های ممکن را مشخص کنید .	۲
7	الف) ثابت کنید $۲^{۴n}-۱$ بر ۳ تقسیم پذیر است. ب) هر گاه سال نو با یکشنبه آغاز شود 22 آذر چه روزی است؟ پ) رقم یکان عدد $23^{23}-17^{17}$ را بیابید.	2/25
8	در گراف G(V, E)داریم $V=\{a,b,c,d,e,f\}$ و $E=\{ab,af,bd,bf,cf,df,ce\}$ الف)گراف را رسم کنید. ب)مقدار Δ وδ را تعیین کنید. پ)مجموعه $N_G(b)$را مشخص کنید. ت) همه دورهای بطول ۳ را در این گراف را بنویسید. ث) چند یال جدید به گراف اضافه کنیم تا گرافی کامل به دست آید؟	2/5
9	گرافی از مرتبه **۱۲** و اندازه ی **۲۲** فقط رئوس از درجه **۳** و **۵** دارد،این گراف چند راس از درجه **۳** دارد؟	۱/۵
10	گراف ناهمبندی از مرتبه ۶ بیشترین تعداد یال ممکن را دارد نمودار این گراف را رسم کنید.	۰/۵
11	گراف ساده G سه منتظم است و تعداد یال هایش ۴ واحد بیشتر از تعداد راس های آن است. الف) مرتبه و اندازه گراف را مشخص کنید. ب) گرافی همبند و گرافی ناهمبند با این مشخصات رسم کنید. «شاد باشید–کرمیان»	۲

سـ حامد محمدی نژاد ریبه ۸۶ منطقه ۲

۱- الف) ۲۴ ب) ۷ ج) $N_G(a)=\{b,c,f\}$ د) ۱۸

۲- الف) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc \xleftrightarrow{\times 2} 2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2ac+2bc$

$\iff 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc \geq 0 \iff a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2 \geq 0$

$\iff (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \geq 0$ حاصل جمع سه عبارت نامنفی، نامنفی است

۲- ب)

$a=2k-1$
$b=2k+1$ ⟶ $a\times b=(2k-1)(2k+1)=4k^2-1$

$a\times b+1=4k^2-1+1=4k^2$ ✓

۳- الف) نادرست مثال نقض

$a=0$
$b=\sqrt{2}$ $a\times b=0\times\sqrt{2}=0\in\mathbb{Q}$

ب) درست معادله همواره جواب دارد

$p\nmid a \longrightarrow (p,a)=1 \mid 19$

$a=2k+1 \xrightarrow{\uparrow 2} a^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k)(k+1)+1=8q+1$

حاصلضرب ۲ عدد متوالی
مضرب ۲ و بالعکس

۴- $a=bq+2$

$a+88=(b+10)q+2-2$ ⟶ $bq+2+88=bq+10q+2-2$

$\longrightarrow 10q=90 \longrightarrow \boxed{q=9}$

۵-

$29 \mid 2^{90}+5^{90} \longrightarrow 2^2+5^2 \mid 2^{90}+5^{90} \longrightarrow \frac{90}{2}=\frac{90}{2}=45$

چون نسبت توان‌ها هم برابر و حاصل برابر عددی فرد است لذا این رابطه برقرار است.

۶-

$(2,3)=1 \mid 20$ پس معادله جواب دارد

$2x+3y=20$

$2x \overset{3}{\equiv} 20 \xrightarrow[(3,2)=1]{\div 2} x \overset{3}{\equiv} 10 \longrightarrow x=3k+10 \quad k\geq -3$

$\longrightarrow -3\leq k\leq 0$

$2(3k+10)+3y=20 \longrightarrow y=-2k \quad k\leq 0$

به ۴ حالت می‌توان این بسته‌بندی را انجام داد.

k	-3	-2	-1	0
x	1	4	7	10
y	6	4	2	0

تمرین ۲

۷- الف) $2^{4n}-1 \overset{?}{\equiv} 3$

$2^4 \equiv 1 \pmod 3 \xrightarrow{\uparrow n} (2^4)^n \equiv 1^n \longrightarrow 2^{4n} \equiv 1 \longrightarrow 2^{4n}-1 \equiv 0 \pmod 3$.

ب) یک‌بیتی ۱ ۱ امروزین

دوبیتی $\longrightarrow$ ۲ ۱۰ ۱۱ $\equiv 2+8+16 \equiv 26 \pmod 7$

سه‌بیتی ۱۰۰ ۱۰۱ ۱۱۰ ۱۱۱ $\equiv 4+5+6+7 \equiv 22 \pmod 7$

ج)

$3^{22} \overset{10}{\equiv} 3^{22}$

$3^2 \overset{10}{\equiv} -1 \xrightarrow{\uparrow 11} 3^{22} \overset{10}{\equiv} (-1)^{11} \overset{10}{\equiv} -1 \xrightarrow{\times 3} 3^{23} \overset{10}{\equiv} -3 \overset{10}{\equiv} 7$

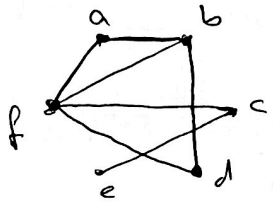
$11^{17} \overset{10}{\equiv} 7^{17}$

$7^2 \overset{10}{\equiv} -1 \xrightarrow{\uparrow 8} 7^{16} \overset{10}{\equiv} (-1)^8 \overset{10}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 7} 7^{17} \overset{10}{\equiv} 7$

$2^{22} - 11^{17} \overset{10}{\equiv} 7 - 7 \overset{10}{\equiv} 0$

۸-

الف)



ب) $\Delta = 4 \quad , \quad \delta = 1$

ج) $N_G(b) = \{a, d, f\}$

د) $abfa \,/\, bfdb$

ه) $q_G = 7 \longrightarrow 8-7 = 1$ یال باید اضافه کنیم

$q_{K_6} = \binom{6}{2} = 15$

۹-

$\begin{cases} x+y = 12 \\ 5x+3y = 2q = 44 \end{cases}$

x تا 5، y تا 3

$-2 \begin{cases} x+y=12 \\ 5x+3y=44 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -2x-2y=-24 \\ 5x+3y=44 \end{cases}$

$3x = 9 \longrightarrow x = 3 \;\&\; \boxed{y=4}$

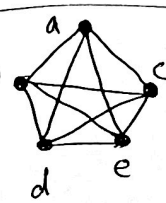
۱۰- الف)

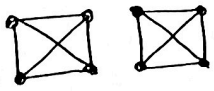
$3p = 2q \longrightarrow 3p = 2q \longrightarrow 3p = 2p+8$

$q = p+4 \longrightarrow 2q = 2p+8 \longrightarrow p = 8$

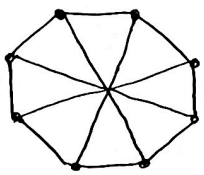
$\boxed{p=8}, \boxed{q=12}$

ب)





ناهمبند



همبند