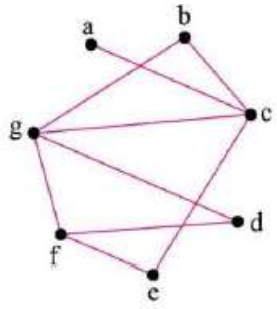
تاریخ آزمون : 3 / 10 / 1401		ساعت برگزاری : 8 صبح
سال تحصیلی : 1402-1401	بسمه تعالی	نوبت : دیماه
نام ونام خانوادگی :	اداره کل آموزش و پرورش استان یزد	سوالات درس : ریاضی گسسته
نام پدر :	مدیریت آموزش و پرورش شهرستان میبد	تعداد صفحات :4
رشته تحصیلی : ریاضی فیزیک	اداره استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان	تعداد سوالات : 13
پایه تحصیلی : دوازدهم	دبیرستان دوره دوم شهید رحیمی فر	مدت پاسخگویی : 110 دقیقه

نام و نام خانوادگی دبیر :	نمره به عدد :	نمره به حروف :	امضاء دبیر :

ردیف	سؤالات	نمره
1	الف) ثابت کنید اگر $5 \mid 2k+1$ آنگاه $25 \mid 14k^2+19k+6$. ب) اگر $\sqrt{7}$ عددی گنگ و a عددی گویا باشد آن گاه $\sqrt[5]{3-a\sqrt{7}}$ عددی گنگ است.	2/5
2	اگر x و y و z سه عدد حقیقی باشند به روش اثبات بازگشتی ثابت کنید : $x^2+y-xy \geq -y^2+x-1$	1/5

3	اگر $b> 1$ و $b\mid 9k+4$ و $b\mid 5k+3$ ثابت کنید b عددی اول است.	1/5
4	باقیمانده تقسیم عدد $(1000)^{47} \times 17 - 9$ را بر 7 بدست آورید.	1/5
5	**به چند طریق می توان با وزنه های3 و 4 کیلوگرمی یک کیسه 19 کیلویی را وزن کرد؟**	1/5
6	اگر دو عدد $3a - 4$ و $5a + 7$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $6a^2 - 7$ را به دست آورید.	1/5

7	چند عدد صحیح مانند n وجود دارد به طوری که $n+3 \mid n^2+7$.	**1/5**
8	اگر عدد $\overline{5a7b24}$ بر 44 بخش پذیر باشد باقیمانده تقسیم این عدد بر 9 را بدست آورید.	**1/25**
9	**اگر بیستم دیماه سالی سه شنبه باشد سومین دوشنبه خرداد همان سال چه روزی از خرداد ماه است؟**	**1/5**
10	**ثابت کنید تعداد راسهای فرد هر گراف عددی زوج است.**	**1/5**

11	**گراف 4- منتظم مرتبه P با افزودن 42 یال به گراف کامل تبدیل می شود اندازه ی گراف را بدست آورید.**	**1/25**
12	بر روی مجموعه رئوس $V = \{a\ ,b\ ,c\ ,\ d, e\}$ چند گراف می توان رسم کرد که $\deg(a) = 2$ **باشد؟**	**0/5**
13	گراف G به صورت مقابل است : الف) $N_G[c]$ را با اعضاء مشخص کنید. ب)بزرگترین درجه در گراف $\bar{G}$ مربوط به کدام راس و چند است؟ ج) حداقل چند یال به این گراف اضافه کنیم تا قطعا همبند باشد؟ د) تعداد کل مسیرها در گراف P_n هم مرتبه G را بدست آورید. 	**2/5**

موفق باشید

فسجد دهقان نژاد رشته ۸۶ منطقه ۲

۱- الف)

$$5 \mid 2k+1 \longrightarrow 2k+1 = 5q$$

$$14k^2+19k+6 = 4k^2+4k+1+10k+5+10k^2+5k$$

$$= (2k+1)^2 + 5(2k+1) + 5k(2k+1) = (5q)^2 + 5(5q+1) + 5k(5q)$$

$$= 25q^2+25q+25kq = 25(q^2+q+kq) = 25q' \quad \checkmark$$

ب) برهان خلف: $\sqrt[5]{3-a\sqrt{7}} = \frac{b}{c}$, $(b,c)=1$, $b,c \in \mathbb{Z}$

$$3-a\sqrt{7} = \frac{b^5}{c^5} \longrightarrow a\sqrt{7} = 3-\frac{b^5}{c^5} \longrightarrow a = \frac{3-\frac{b^5}{c^5}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{3-\frac{b^5}{c^5}}{7} \times \sqrt{7}$$

حاصلضرب یک عدد گویا در یک عدد گنگ زمانی عددی گویا است که عدد گویا صفر باشد

$$3-\frac{b^5}{c^5} = 0 \longrightarrow \frac{b}{c} = \sqrt[5]{3}$$ خلاف فرض ⟵ پس حکم درست است

۲- $x^2+y-xy \geq -y^2+x-1 \iff \times 2 \iff 2x^2+2y-2xy \geq -2y^2+2x-2$

$$\iff 2x^2+2y-2xy+2y^2-2x+2 \geq 0 \iff x^2-2xy+y^2+x^2-2x+1+y^2-2y+1 \geq 0$$

$$\iff (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2 \geq 0$$ حاصل جمع سه عبارت نامنفی همواره نامنفی است. بدیهی

۳- $b \mid 9k+4 \longrightarrow 9k+4 = bq \xrightarrow{\times 5}$ $45k+20 = 5bq$

$b \mid 5k+3 \longrightarrow 5k+3 = bq' \xrightarrow{\times 9}$ $45k+27 = 9bq'$

$$7 = b(5q-9q') \longrightarrow 7 = bq'' \longrightarrow b \mid 7$$

$$\Rightarrow \boxed{b=7}$$

۴-

$$1000^{47} \times 17 - 9 \overset{7}{\equiv} ?$$

$$1000 \overset{7}{\equiv} -1 \xrightarrow{\uparrow 47} 1000^{47} \overset{7}{\equiv} (-1)^{47} \overset{7}{\equiv} -1 \overset{7}{\equiv} 6$$

$$17 \overset{7}{\equiv} 3$$

$$1000^{47} \times 17 - 9 \overset{7}{\equiv} 6 \times 3 - 9 \overset{7}{\equiv} 9 \overset{7}{\equiv} 2$$

۵- معادله جواب دارد $(3,4)=1 \mid 19$

$$3x+4y = 19$$

$$3x \overset{4}{\equiv} 19 \overset{4}{\equiv} 15 \xrightarrow[(3,4)=1]{\div 3} x \overset{4}{\equiv} 5 \overset{4}{\equiv} 1 \longrightarrow \boxed{x = 4k+1}$$

$$3(4k+1)+4y = 19 \longrightarrow 4y = -12k+16 \longrightarrow \boxed{y = -3k+4}$$

$x \geq 0 \cup k \leq 1 \longrightarrow 1 \geq k \geq 0$ $\quad k \geq 0$

۲ طریق می‌توان ۱۹ کیلو را با این وزنه‌ها وزن کرد

۱۰ ۸۵۰

۶- $3a-4 \overset{10}{\equiv} 5a+7 \longrightarrow 2a \overset{10}{\equiv} 11 \longrightarrow (2,10)=2 \not| 11$

این ۲ عدد به هیچ عنوان نمی‌توانند رقم‌های یکسانی داشته باشند

۷-

$n+3 \mid n^2+7$ ، $n+3 \mid n^2+5$

$n+3 \mid n+3 \xrightarrow{\times n}$ ، $n+3 \mid n^2+3n$

$n+3 \mid 3n-7$

$n+3 \mid 3n+9$

$n+3 \mid 16$

$n+3$ می‌تواند یکی از مقسوم‌علیه‌های ۱۶ باشد

$n+3=-8 \longrightarrow n=-11$ ✓

$n+3=-4 \longrightarrow n=-7$ ✓

$n+3=-2 \longrightarrow n=-5$ ✓

$n+3=-1 \longrightarrow n=-4$ ✓

$n+3=1 \longrightarrow n=-2$ ✓

$n+3=2 \longrightarrow n=-1$ ✓

$n+3=4 \longrightarrow n=1$ ✓

$n+3=8 \longrightarrow n=5$ ✓

$n+3=16 \longrightarrow n=13$ ✓

$n+3=-16 \longrightarrow n=-19$ ✓

پس این رابطه برای ۱۰ مقدار صحیح n برقرار است

۸-

$\overline{5a7b24} \overset{4}{\equiv} 0 \longrightarrow 24 \overset{4}{\equiv} 0$ ✓

$\overline{5a7b24} \overset{11}{\equiv} 0 \longrightarrow 4-2+b-7+a-5 \overset{11}{\equiv} 0 \longrightarrow a+b-10=11k$

چون a و b رقم هستند پس داریم $18 \geq a+b \geq 0$ پس داریم

$a+b=10 \longrightarrow \overline{5a7b24} \overset{9}{\equiv} 5+a+7+b+2+4 \overset{9}{\equiv} 18+a+b \overset{9}{\equiv} 28 \overset{9}{\equiv} 1$

۹-

امین سال $= 6 \times 31 + 3 \times 30 + 6 = 282$ دی

$282 \overset{7}{\equiv} 2$ ← کدام شنبه

اولین هزار معادل یکشنبه می‌باشد

$1 \text{ هزار} = 2 \times 31 + 1 = 63 \overset{7}{\equiv} 0 \longrightarrow$ پس اولین دوشنبه هزار با تاریخ ۲ هزار می‌باشد

۲ هزار ← اولین دوشنبه ($+7$) ← ۹ هزار ← دومین دوشنبه ($+7$) ← ۱۶ هزار ← سومین دوشنبه

۱۰- می‌دانیم مجموع درجات رئوس‌های یک گراف ساده ۲ برابر تعداد یال‌هاست.

$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$

A : مجموع درجات رئوس زوج

B : مجموع درجات رئوس فرد

$A+B=2q \longrightarrow B=2q-A$

A عددی است زوج

تفاضل ۲ عدد زوج عددی است زوج

B عددی است زوج یعنی حاصل جمع تعدادی عدد فرد زوج است پس تعداد اعداد فرد زوج است.

۱۱- گراف کامل: p ، گراف مرتطر: q

$$2p = 2q$$

$$4p = 2q \quad (I)$$

$$q \xrightarrow{+42} q+42$$

$$q+42 = \binom{p}{2} \quad (II)$$

$$I \rightarrow q = 2p$$

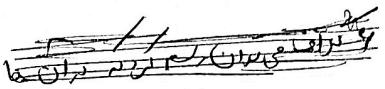
$$II \quad q = \frac{p(p-1)}{2} - 42 \Rightarrow 2p = \frac{p(p-1)}{2} - 42 \xrightarrow{\times 2} p^2 - 5p - 84 = 0$$

$$(p+7)(p-12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = -7 \times \\ p = 12 \end{cases}$$

$$q = 2p = 24$$

۱۲- برای آنکه مهره‌ی راسی a همراه 3 یال یعنی با 3 راسی دیگر مجاور باشد باید داشته باشیم

$$\{b,c,d,e\} \longrightarrow \binom{4}{3} = 4$$



گراف مورد نظر

حال به ازای بقیه یال‌هایی که از آن‌ها راسی a نیست بقیه از راسی a بین یا از روی 6 یال حداکثر مجموعا دارند که هر یال می‌تواند بیشتر یا کمتر باشد پس $2^6 = 64$ حالت نیز مربوط به سایر یال‌ها می‌شود

$$\text{حداکثر تعداد یال} = 4 \times 64 = 256$$

۱۳- الف) $N_G[c] = \{a, b, c, e, g\}$

ب) $\Delta_{\bar{G}} = \deg_{\bar{G}} a = 5$

ج) بازه‌ی قطعا هیبنی $\binom{7}{2} \leq q \leq 1 + \binom{9}{2}$

گراف حاضر 9 یال دارد و داریم

$$21 \leq q \leq 14$$

حداقل 7 یال اضافه کنیم تا گراف قطعا هیبنی باشد $\quad 16 - 9 = 7$

د) $P_7 =$ 

تعداد کل سیرها $= 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$

سیر طول ۱ ، سیر طول ۲ ، سیر طول ۳ ، سیر طول ۴ ، سیر طول ۵ ، سیر طول ۶