| | | |
|---|---|---|
| نام و نام خانوادگی: | بسمه تعالی | آزمون درس: ریاضیات گسسته |
| کلاس: | اداره آموزش وپرورش منطقه۱۸ | تعداد صفحه: ۲ |
| پایه:دوازدهم | دبیرستان نمونه دولتی فدک | مدت آزمون: ۱۲۰دقیقه |
| رشته:ریاضی | امتحانات نوبت اول دی ماه ۱۴۰۱ | |
| نمره به عدد: | نمره به حروف: | امضای دبیر: |

۱ ثابت کنید اگر $a$ برابر مجموع مربع‌های ۲ عدد صحیح باشد. $2a$ نیز برابر مجموع مربع‌های دو عدد صحیح است. (۱)

۲ گزارهٔ درست را اثبات کنید و برای گزارهٔ نادرست، مثال نقض ارائه دهید.

الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. (۰.۵)

ب) اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش‌پذیر است. (۰.۵)

۳ اگر $\alpha$ و $\beta$ دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\alpha-\beta$ گنگ است. (۱)

۴ برای هر سه عدد حقیقی $x, y, z$ ثابت کنید: (۱)

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz$$

۵ بزرگ‌ترین مقدار $x$ را بیابید به‌طوری که $x$ هر دو عدد $7n-4$ و $5n+3$ را بشمارد. (۱)

۶ اگر عددی مانند $k$ در $\mathbb{Z}$ باشد به‌طوری‌که $5|4k+1$، ثابت کنید: $25|16k^2+28k+6$ (۱)

۷ ثابت کنید اگر $n$ عددی طبیعی باشد کسر $\frac{21n+4}{14n+3}$ ساده شدنی نیست. (۱)

۸ در تقسیم عدد طبیعی $a$ بر ۲۷ باقیماندهٔ تقسیم ۴ واحد از مربع خارج قسمت کمتر است، بیشترین مقدار ممکن $a$ را بیابید. (۱)

۹ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $a$ بر دو عدد ۶ و ۵ به‌ترتیب ۳ و ۲ باشد؛ باقی‌ماندهٔ تقسیم $a$ را بر ۳۰ بیابید. (۱)

۱۰ اگر باقیماندهٔ تقسیم $m$ و $n$ بر ۱۳ به‌ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد در این صورت باقیماندهٔ تقسیم عدد $5n-3m$ بر ۱۳ را به‌دست آورید. (۱)

۱۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=(1000)^{25}\times 9+11$ را بر ۷ بیابید. (۱)

۱۲ اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد. در این صورت با استفاده از هم‌نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟ (۱)

۱۳ ثابت کنید می‌توان دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد، به‌عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح $a, b, c$ و عدد طبیعی $m$، اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ آن‌گاه $ac \overset{m}{\equiv} bc$. (۱)

۱۴ معادلهٔ همنهشتی $3x \overset{7}{\equiv} 13$ را حل و جواب عمومی آن را به‌دست آورید. (۱)

۱۵ با تبدیل معادلهٔ سیاله خطی $2000x+5000y=29000$ به معادلهٔ همنهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید. (۱)

۱۶ تعداد کل گراف‌های ساده را روی مجموعهٔ $V=\{a,b,c,d,e\}$ بیابید. همچنین مطلوب است تعداد گراف‌هایی که: (۱)

الف – دارای ۵ یال باشد.

ب – دارای ۷ یال باشد و یال‌های $ed, ab, cd$ را شامل باشد.

۱۷ هرگاه $G=(V,E)$ , $V=\{a,b,c,d,e\}$ , $E=\{ac,dc,ed,da,bc,ce\}$ (1)

الف – مطلوب است: $p+q+\delta+\Delta$.

ب – مطلوب است: $|N_G(a)|+|N_G[e]|$.

دبیرستان نمونه دولتی فدک

۱۸ اگر درجات رئوس گراف $G$ به‌صورت ۵, ۴, ۳, ۳, ۳, ۲, ۲, ۲ باشد، اندازهٔ گراف $\bar{G}$ چقدر است؟ ۱

۱۹ در گراف $K_5$، بین ۲ رأس دلخواه و متمایز $u, v$ چند مسیر متفاوت وجود دارد؟ ۱

۲۰ گراف $P_5$ را رسم کرده و تمام مسیرهای به طول ۳ را مشخص کنید. ۱

دبیرستان نمونه دولتی فدک

# پاسخنامه تشریحی

**۱** به روش مستقیم ثابت می‌کنیم: (فرض می‌کنیم $x$ و $y$ دو عدد صحیح می‌باشند.)

$$a = x^۲ + y^۲ \Rightarrow ۲a = ۲x^۲ + ۲y^۲ = (x^۲ + ۲xy + y^۲) + (x^۲ - ۲xy + y^۲)$$
$$= (x+y)^۲ + (x-y)^۲$$

**۲**

نادرست **الف**

$$\sqrt{۲}, -\sqrt{۲} \in Q^C$$
$$\sqrt{۲} + (-\sqrt{۲}) = ۰ \notin Q^C$$

درست **ب**

$$(۲k+۱)^۲ - ۱ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ - ۱ = ۴k(k+۱) = ۴ \times ۲q = ۸q$$

**۳** از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

فرض خلف: $\alpha - \beta$ گویاست.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha - \beta = m \in Q \\ \alpha + \beta = n \in Q \end{array}\right\} \Rightarrow ۲\alpha = m + n \Rightarrow \alpha = \frac{m+n}{۲} \Rightarrow \alpha \in Q \text{ ( تناقض با فرض )}$$

**۴**

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq xy + yz + xz \Leftrightarrow ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲z^۲ \geq ۲xy + ۲yz + ۲xz \Leftrightarrow (x^۲ + y^۲ - ۲xy) + (y^۲ + z^۲ - ۲yz) + (x^۲ + z^۲ - ۲xz) \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^۲ + (y-z)^۲ + (x-z)^۲ \geq ۰$$

چون نابرابری آخری همواره درست است پس با بازگشت روابط حکم برقرار است.

**۵**

$$\left.\begin{array}{l} x \mid ۷n - ۴ \rightarrow x \mid ۵(۷n-۴) \\ x \mid ۵n + ۳ \rightarrow x \mid ۷(۵n+۳) \end{array}\right\} \Rightarrow x \mid ۷(۵n+۳) - ۵(۷n-۴) \rightarrow x \mid ۴۱$$

بنابراین بیش‌ترین مقدار $x$، ۴۱ است.

**۶**

$$۵ \mid ۴k+۱ \rightarrow ۵^۲ \mid (۴k+۱)^۲ \rightarrow ۲۵ \mid ۱۶k^۲ + ۸k + ۱ \quad (I)$$

$$\left.\begin{array}{l} ۵ \mid ۴k+۱ \\ ۵ \mid ۵ \end{array}\right\} \rightarrow ۲۵ \mid ۲۰k + ۵ \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} \left\{\begin{array}{l} ۲۵ \mid ۲۰k + ۵ \\ ۲۵ \mid ۱۶k^۲ + ۸k + ۱ \end{array}\right. \rightarrow ۲۵ \mid ۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶$$

**۷** باید ثابت کنیم $(۲۱n+۴ \, , \, ۱۴n+۳) = ۱$ می‌توان نوشت:

$$(۲۱n+۴, ۱۴n+۳) = (۲۱n+۴-۱۴n-۳, ۱۴n+۳) = (۷n+۱ \, , \, ۱۴n+۳) = (۱ \, , \, ۷n+۱) = d$$

در نتیجه $d \mid ۱$ بنابراین $d = ۱$، یعنی $۲۱n+۴ \, , \, ۱۴n+۳$ هیچ مقسوم علیه مشترکی جز $\pm ۱$ ندارند و کسر مورد نظر ساده شدنی نیست.

**۸** طبق فرض داریم:

$$a = ۲۷q + q^۲ - ۴ \;\; , \;\; q^۲ - ۴ < ۲۷$$

بنابراین $q^۲ < ۳۱$ و $q \leq ۵$ بنابراین بیشرین مقدار $a$ برابر ۱۵۶ بدست می‌آید.

**۹** بنابر قضیهٔ تقسیم داریم:

$$\left\{\begin{array}{l} a = ۵q + ۲ \\ a = ۶q' + ۳ \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} ۶a = ۳۰q + ۱۲ \\ ۵a = ۳۰q' + ۱۵ \end{array}\right. \Rightarrow a = ۳۰q'' - ۳$$

$$\Rightarrow a = ۳۰r + ۲۷$$

**۱۰**

$$\left.\begin{array}{l} m = ۱۳q_۱ + ۲ \xrightarrow{\times ۳} ۳m = ۱۳(۳q_۱) + ۶ \\ n = ۱۳q_۲ + ۹ \xrightarrow{\times ۵} ۵n = ۱۳(۵q_۲) + ۴۵ \end{array}\right\} \rightarrow ۵n - ۳m = ۱۳q' + ۳۹ \rightarrow ۵n - ۳m = ۱۳q'' + ۰ \rightarrow r = ۰$$

دبیرستان نمونه دولتی فدک

۱۱

$۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۱۰۰۰)^{۲۵} \times ۹ + ۱۱ \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۲۵} \times ۹ + ۱۱ \overset{۷}{\equiv} ۲ \Rightarrow r = ۲$

۱۲

روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر می‌گیریم ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ روز بهمن، فاصلهٔ اول تا ۱۲ بهمن است، پس داریم:

| ش | ی | د | س | چ | پ | ج |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ |

$۲۹ + ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ + ۱۲ = ۱۳۱ \rightarrow ۱۳۱ \overset{۷}{\equiv} ۵$

که متناظر این عدد در جدول روز پنج‌شنبه را نشان می‌دهد.

۱۳

$a \equiv b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow m|c(a-b) \Rightarrow m|ac-bc \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$

۱۴

نکته : $ac \overset{m}{\equiv} bc\,,\ (c,m) = d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

$۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳ \Rightarrow ۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳ - ۷ \Rightarrow ۳x \overset{۷}{\equiv} ۶ \xrightarrow{(۳,۷)=۱} x \overset{۷}{\equiv} ۲ \Rightarrow x = ۷k + ۲$

۱۵

معادلهٔ سیاله $۲x + ۵y = ۲۹$ دارای جواب است، زیرا:

$\overbrace{(۲,۵)}^{۱}|۲۹$

$۲x + ۵y = ۲۹ \Rightarrow ۲x \overset{۵}{\equiv} ۲۹ \Rightarrow ۲x \overset{۵}{\equiv} ۴ \Rightarrow x = ۵k + ۲$

$x$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$۲(۵k+۲) + ۵y = ۲۹ \Rightarrow ۵y = -۱۰k + ۲۵ \Rightarrow y = -۲k + ۵$

۱۶

$\binom{۵}{۲} = ۱۰ \rightarrow$ تعداد کل گراف‌ها $= ۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$

الف -

تعداد گراف‌ها $= \binom{۱۰}{۵} = ۲۵۲$

ب -

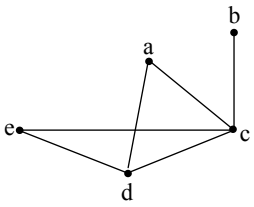
$۷ - ۳ = ۴\ ,\ ۱۰ - ۳ = ۷ \rightarrow$ تعداد گراف‌ها $= \binom{۷}{۴} = ۳۵$

۱۷

$p = ۵\ ,\ q = ۶\ ,\ \delta = ۱\ ,\ \Delta = ۴$

$p + q + \delta + \Delta = ۱۶$

$\left.\begin{array}{l} N_G(a) = \{d,c\} \rightarrow |N_G(a)| = ۲ \\ N_G[e] = \{e,c,d\} \rightarrow |N_G[e]| = ۳ \end{array}\right\} \rightarrow ۲ + ۳ = ۵$




۱۸

$\sum_{i=۱}^{p} \deg v_i = ۲q \Rightarrow ۵ + ۴ + ۳ + ۳ + ۳ + ۲ + ۲ + ۲ = ۲q \Rightarrow q = ۱۲$

$q + \bar{q} = \frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow ۱۲ + \bar{q} = \frac{۸ \times ۷}{۲} \Rightarrow ۱۲ + \bar{q} = ۲۸ \rightarrow q = ۱۶$

۱۹

دبیرستان نمونه دولتی فدک

مسیر به طول ۱ ۱ $u, v \rightarrow$

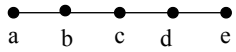
مسیر به طول ۲ ۳ $u\,\underline{3}\,v \rightarrow$ $u,\ \boxed{3},\ v \rightarrow$

مسیر به طول ۳ ۶ $u\,\underline{3}\,\underline{2}\,v \rightarrow$ $u,\ \boxed{3},\ \boxed{2},\ v \rightarrow$

مسیر به طول ۴ ۶ $u\,\underline{3}\,\underline{2}\,\underline{1}\,v \rightarrow$ $u,\ \boxed{3},\ \boxed{2},\ \boxed{1},\ v \rightarrow$

۱۶

۲۰ شکل زیر را در نظر بگیرید:




P۵

$abcd \quad , \quad bcde$

دبیرستان نمونه دولتی فدک