نام و نام خانوادگی:	**مدیریت آموزش و پرورش ناحیه یک قم**	امتحان درس : **ریاضیات گسسته**
کلاس: **دوازدهم ریاضی**	دبیرستان ماندگاردین و دانش قم(۱۳۳۳) دین و دانش	تاریخ امتحان : **۱۰ / ۱۰ / ۱۴۰۲**
نام دبیر: **علیرضا اکبریان**		مدت امتحان : **۱۱۰ دقیقه**

سوالات	بارم
الف) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را با « د » یا « ن » مشخص کنید.	۱
۱) حاصل‌ضرب هر دو عدد گنگ، همواره عددی گنگ است.	
۲) چهار برابر حاصل ضرب دو عدد متوالی، همواره یک مربع کامل است.	
۳) برای اعداد صحیح a و b و c که $a\neq 0$، اگر $a\mid bc$ آنگاه $a\mid b$ یا $a\mid c$	
۴) حداقل ۴ گراف ۳ منتظم از مرتبه ۷ وجود دارد.	
ب) جاهای خالی را به طور مناسب کامل کنید.	۱
۵) عدد ..... یک مثال نقض برای رد گزاره « به ازای هر عدد طبیعی n مقدار عبارت n^2+n+17 عددی اول است. » می‌باشد.	
۶) معادله سیاله $ax+by=c$ در صورتی جواب دارد که	
۷) گرافی را همبند گوییم که بین هر دو راس آن، حداقل یک ..... وجود داشته باشد.	
۸) تعداد یال‌های گراف ۳ منتظم از مرتبه ۸ برابر ..... می‌باشد.	
پ) در سوالات زیر، گزینه درست را انتخاب کنید.	۱/۲۵
۹) کدام گزینه درست است؟ الف) $۱۴۰۲\in[۱]_۵$ ب) $۱۴۰۲\in[۲]_۵$ پ) $۱۴۰۲\in[۳]_۵$ ت) $۱۴۰۲\in[۴]_۵$	
۱۰) حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی، همواره بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟ الف) ۹ ب) ۸ پ) ۷ ت) ۶	
۱۱) عدد $\overline{a۲۶a۵۳a۲}$ بر ۹ بخش‌پذیر است. a کدام گزینه است؟ الف) ۵ ب) ۴ پ) ۳ ت) ۲	
۱۲) گراف کامل از مرتبه ۱۰ دارای چند یال است؟ الف) ۴۵ ب) ۳۵ پ) ۹۰ ت) ۷۰	
۱۳) اگر G یک گراف با ۳۰ راس باشد، حاصل $\deg_G(a)+\deg_{\overline{G}}(a)$ برابر کدام گزینه می‌باشد؟ الف) ۲۷ ب) ۲۸ پ) ۲۹ ت) ۳۰	
ت) برای سوالات زیر، پاسخ کامل بنویسید.	
۱۴) ثابت کنید اگر به حاصل ضرب دو عدد زوج متوالی، یک واحد اضافه کنیم، عدد حاصل برابر مجذور عدد فرد بین آنها است.	۱

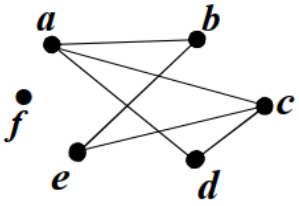
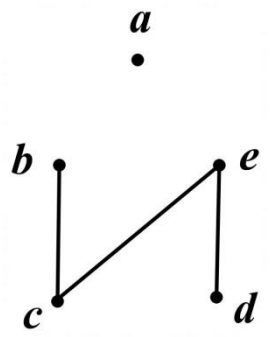
www-kanoon-ir

۱۵) اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $۲\alpha-۳\beta$ عددی گنگ هستند.	۱
۱۶) ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی مثبت x و y داریم : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲$	۱
۱۷) باقی‌مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب برابر ۳ و ۴ می‌باشد. باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۲۰ را محاسبه کنید.	۱/۲۵
۱۸) اگر a عددی طبیعی بزرگتر از یک باشد، حاصل $(۳a+۲, ۴a+۵)$ را به دست آورید.	۱
۱۹) ثابت کنید : اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $b \overset{m}{\equiv} c$ آنگاه $a \overset{m}{\equiv} c$ (رابطه تعدی در همنهشتی)	۱
۲۰) باقی‌مانده تقسیم عدد $A=۱!+۲!+۳!+\cdots+۵۰۰!$ را بر ۲۱ به دست آورید.	۱/۲۵

www-kanoon.ir

۲۱) آخرین رقم سمت راست عدد $۱۴۰۲^{۲۰۲۳}$ را به دست آورید.	**۱**
۲۲) معادله‌ی هم‌نهشتی $۸x \equiv ۲۰ \pmod{۱۲}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید.	**۱**
۲۳) باقی‌مانده تقسیم $۱۹ + (۷ \times ۶۳^{۱۲۰})$ بر ۱۶ به دست آورید.	**۱**
۲۴) اول خرداد یک سال، دوشنبه می‌باشد. دهم آبان ماه همان سال، چه روزی از هفته می‌باشد؟	**۱**
۲۵) به چند طریق می‌توان ۱۵۰ هزار تومان را به اسکناس‌های ۵ هزار تومانی و ۱۰ هزار تومانی تبدیل کرد؟	**۱/۵**
۲۶) ثابت کنید تعداد راس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.	**۱**

www-kanoon-ir

۲۷) گراف روبرو داده شده است. الف) مرتبه و اندازه گراف را بنویسید. ب) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را بنویسید. پ) اگر $N_G(x)=\{a\,,\,e\,,\,d\}$ باشد، x را به دست آورید. ت) یک دور به طول ۵ در این گراف بنویسید. 	۱/۵
۲۸) نمودار گراف G به صورت روبرو می‌باشد. الف) مکمل گراف G را رسم کنید. ب) در گراف مکمل، یک مسیر به طول ۴ بین راس‌های a و e بنویسید. پ) آیا گراف G و مکمل آن، همبند می‌باشند؟ 	۱/۲۵
موفق باشید.	جمع نمرات : ۲۰

www-kanoon.ir

نام و نام خانوادگی:	**مدیریت آموزش و پرورش ناحیه یک قم**	امتحان درس : ریاضیات گسسته
کلاس: دوازدهم ریاضی	دبیرستان ماندگاردین و دانش قم(۱۳۳۳) دین و دانش	تاریخ امتحان : ۱۰ / ۱۰ / ۱۴۰۲
نام دبیر: علیرضا اکبریان		مدت امتحان : ۱۱۰ دقیقه

سوالات	بارم
الف) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را با « د » یا « ن » مشخص کنید.	۱
۱) حاصل‌ضرب هر دو عدد گنگ، همواره عددی گنگ است. ن $\sqrt{۲}\times\sqrt{۸}=\sqrt{۱۶}=۴$	
۲) چهار برابر حاصل ضرب دو عدد متوالی، همواره یک مربع کامل است. ن $۴(۲)(۳)=۲۴$	
۳) برای اعداد صحیح a و b و c که $a\neq ۰$، اگر $a\mid bc$ آنگاه $a\mid b$ یا $a\mid c$ ن ۱۵ | ۹×۲۵ ولی ۱۵ | ۹ و ۱۵ | ۲۵	
۴) حداقل ۴ گراف ۳ منتظم از مرتبه ۷ وجود دارد. ن ۳ و ۷ هردو فرد می‌باشند.	
ب) جاهای خالی را به طور مناسب کامل کنید.	۱
۵) عدد ۱۷ یک مثال نقض برای رد گزاره « به ازای هر عدد طبیعی n مقدار عبارت $n^۲+n+۱۷$ عددی اول است. » می‌باشد.	
۶) معادله سیاله $ax+by=c$ در صورتی جواب دارد که $(a,b)\mid c$	
۷) گرافی را همبند گوییم که بین هر دو راس آن، حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.	
۸) تعداد یال‌های گراف ۳ منتظم از مرتبه ۸ برابر $\frac{۳\times۸}{۲}=۱۲$ می‌باشد.	
پ) در سوالات زیر، گزینه درست را انتخاب کنید.	۱/۲۵
۹) کدام گزینه درست است؟ الف) $۱۴۰۲\in[۱]_۵$ ب) ✓ $۱۴۰۲\in[۲]_۵$ پ) $۱۴۰۲\in[۳]_۵$ ت) $۱۴۰۲\in[۴]_۵$	
۱۰) حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی، همواره بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟ الف) ۹ ب) ۸ پ) ۷ ت) ✓ ۶	
۱۱) عدد $\overline{a۲۶a۵۳a۲}$ بر ۹ بخش‌پذیر است. a کدام گزینه است؟ الف) ۵ ب) ۴ پ) ✓ ۳ ت) ۲ $a+۲+۶+a+۵+۳+a+۲\overset{۹}{\equiv}۰$ $۳a+۱۸\overset{۹}{\equiv}۰$ $۳a\overset{۹}{\equiv}۰$ $a=۳$	
۱۲) گراف کامل از مرتبه ۱۰ دارای چند یال است؟ ✓ الف) ۴۵ ب) ۳۵ پ) ۹۰ ت) ۷۰ $\frac{۱۰\times۹}{۲}=۴۵$ گزینه‌ها	
۱۳) اگر G یک گراف با ۳۰ راس باشد، حاصل $\deg_G(a)+\deg_{\overline{G}}(a)$ برابر کدام گزینه می‌باشد؟ الف) ۲۷ ب) ۲۸ پ) ✓ ۲۹ ت) ۳۰	
ت) برای سوالات زیر، پاسخ کامل بنویسید.	
۱۴) ثابت کنید اگر به حاصل ضرب دو عدد زوج متوالی، یک واحد اضافه کنیم، عدد حاصل برابر مجذور عدد فرد بین آنها است. $a=۲k$ $b=۲k+۲$ $\rightarrow ab+۱=۲k(۲k+۲)+۱=۴k^۲+۴k+۱=(۲k+۱)^۲$	۱

www-kanoon-ir

۱	۱۵) اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $2\alpha-3\beta$ عددی گنگ هستند. برهان خلف: فرض کنیم $2\alpha-3\beta$ عددی گنگ نباشد، پس $2\alpha-3\beta$ عددی گویا است. می دانیم مجموع و تفاضل و حاصل ضرب دو عدد گویا، عددی گویا است، پس: $(2\alpha-3\beta)+3(\alpha+\beta)=2\alpha-3\beta+3\alpha+3\beta=5\alpha\in\mathbb{Q}\rightarrow\alpha\in\mathbb{Q}$ ✗ فرض خلف باطل و حکم ثابت است.
۱	۱۶) ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی مثبت x و y داریم: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2 \xrightarrow[xy>0]{\times xy} xy\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geqslant 2xy \longleftrightarrow x^2+y^2\geqslant 2xy$ $\longleftrightarrow x^2+y^2-2xy\geqslant 0 \longleftrightarrow (x-y)^2\geqslant 0$ ✓
۱/۲۵	۱۷) باقی‌مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب برابر ۳ و ۴ می‌باشد. باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۲۰ را محاسبه کنید. $a=4k+3 \quad k\in\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 5} 5a=20k+15$ $a=5k'+4 \quad k'\in\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 4} 4a=20k'+16$ بالا منهای پایین $\Longrightarrow a=20(k-k')-1$ (k'') $\longrightarrow a=20k''-1+20-20 \longrightarrow a=20(k''-1)+19$ باقیمانده 19 ←
۱	۱۸) اگر a عددی طبیعی بزرگتر از یک باشد، حاصل $(2a+3,5a+4)$ را به دست آورید. $(5a+4,2a+3)=d \longrightarrow d\mid 5a+4 \xrightarrow{\times 2} d\mid 10a+8$ $d\mid 2a+3 \xrightarrow{\times 5} d\mid 10a+15$ پایین منهای بالا $\longrightarrow d\mid 7$ $d=1$ غ ق ق یا $d=7$ ←
۱	۱۹) ثابت کنید: اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ و $b\overset{m}{\equiv}c$ آنگاه $a\overset{m}{\equiv}c$ (رابطه تعدی در همنهشتی) $a\overset{m}{\equiv}b\longrightarrow a-b=mk \quad (k\in\mathbb{Z})$ $b\overset{m}{\equiv}c\longrightarrow b-c=mk' \quad (k'\in\mathbb{Z})$ جمع: $a-c=m(k+k') \longrightarrow a\overset{m}{\equiv}c$ ($k+k'\in\mathbb{Z}$)
۱/۲۵	۲۰) باقی‌مانده تقسیم عدد $A=1!+2!+3!+\cdots+500!$ را بر ۲۱ به دست آورید. می دانیم از $7!$ به بعد، همه اعداد طبیعی فاکتوریل دار، مضرب ۲۱ می باشند زیرا مضرب دو عدد ۳ و ۷ می باشند. $A\overset{21}{\equiv}1!+2!+3!+4!+5!+6!$ $\overset{21}{\equiv}1+2+6+24+120+720$ $\overset{21}{\equiv}873$ $\overset{21}{\equiv}12$ → باقیمانده

www.kanoon.ir

۲۱) آخرین رقم سمت راست عدد $۱۴۰۲^{۲۰۲۳}$ را به دست آورید. — ۱

$۲۰۲۳ \mid ۴$ باقی‌مانده ۳ — $۱۴۰۲ \mid ۱۰$ باقی‌مانده ۲

$۱۴۰۲^{۲۰۲۳} \overset{۱۰}{\equiv} ۲^{۳} \overset{۱۰}{\equiv} ۸$ ← رقم یکان

۲۲) معادله‌ی هم‌نهشتی $۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید. — ۱

$۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰$ ← -۱۲ ← $۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۸$ ← $\div ۸$ ← $x \overset{\frac{۱۲}{۴}}{\equiv} ۱$

$(۱۲, ۸) = ۴$

$x = ۳k + ۱$

۲۳) باقی‌مانده تقسیم $(۶۳^{۱۲۰} \times ۷) + ۱۹$ بر ۱۶ به دست آورید. — ۱

$۶۳ \overset{۱۶}{\equiv} -۱$

$۶۳^{۱۲۰} \overset{۱۶}{\equiv} (-۱)^{۱۲۰} \overset{۱۶}{\equiv} ۱$

$۶۳^{۱۲۰} \times ۷ \overset{۱۶}{\equiv} ۱ \times ۷ \overset{۱۶}{\equiv} ۷$

$(۶۳^{۱۲۰} \times ۷) + ۱۹ \overset{۱۶}{\equiv} ۷ + ۱۹ \overset{۱۶}{\equiv} ۲۶ \overset{۱۶}{\equiv} ۱۰$ ← باقی‌مانده

۲۴) اول خرداد یک سال، دوشنبه می‌باشد. دهم آبان ماه همان سال، چه روزی از هفته می‌باشد؟ — ۱

خرداد: $(۳۱ - ۱)$ — تیر: ۳۱ — مرداد: ۳۱ — شهریور: ۳۱ — مهر: ۳۰ — آبان: $+۱۰$

$(۳۱-۱) + ۳۱ + ۳۱ + ۳۱ + ۳۰ + ۱۰ \overset{۷}{\equiv} ۲ + ۳ + ۳ + ۳ + ۲ + ۳ \overset{۷}{\equiv} ۲$

اول خرداد (دوشنبه) $\xrightarrow{+۲}$ دهم آبان (چهارشنبه)

۲۵) به چند طریق می‌توان ۱۵۰ هزار تومان را به اسکناس‌های ۵ هزار تومانی و ۱۰ هزار تومانی تبدیل کرد؟ — ۱/۵

تعداد اسکناس‌های ۵۰۰۰ تومانی $= x$

تعداد اسکناس‌های ۱۰۰۰۰ تومانی $= y$

$۵۰۰۰x + ۱۰۰۰۰y = ۱۵۰۰۰۰ \longrightarrow x + ۲y = ۳۰$

$x \overset{۲}{\equiv} ۳۰ \longrightarrow x \overset{۲}{\equiv} ۰ \longrightarrow x = ۲k$ ← جایگذاری ← $y = -k + ۱۵$

$x \geq ۰ \longrightarrow ۲k \geq ۰ \longrightarrow k \geq ۰$

$-k + ۱۵ \geq ۰ \longrightarrow -k \geq -۱۵ \longrightarrow k \leq ۱۵$

$۰ \leq k \leq ۱۵$ ← ۱۶ حالت

۲۶) ثابت کنید تعداد راس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است. — ۱

$\sum_{i=1}^{۲} deg(v_i) = ۲q \longrightarrow$ مجموع درجه‌های راس‌های زوج + مجموع درجه‌های راس‌های فرد $= ۲q$

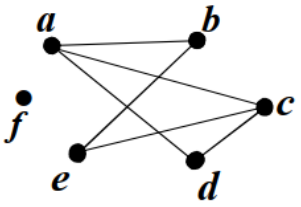
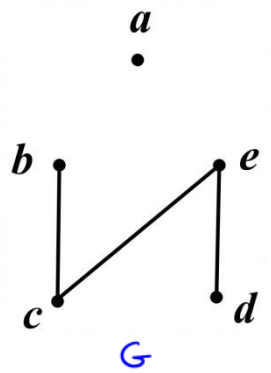
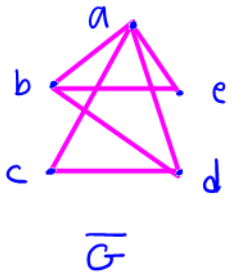
جمع تعدادی عدد زوج + جمع تعدادی عدد فرد $= ۲q$

جمع تعدادی عدد زوج $= ۲q -$ جمع تعدادی عدد فرد

عددی زوج $=$ جمع تعدادی عدد فرد ← زوج

عددی زوج = تعداد راس‌های فرد

www.kanoon.ir

۱/۵	۲۷) گراف روبرو داده شده است. الف) مرتبه و اندازه گراف را بنویسید. ب) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را بنویسید. پ) اگر $N_G(x)=\{a\,,e\,,d\}$ باشد، x را به دست آورید. ت) یک دور به طول ۵ در این گراف بنویسید.  الف) $p=6$ $q=6$ ب) $\Delta(G)=3$ $\delta(G)=0$ پ) $x=c$ ت) adcebda
۱/۲۵	۲۸) نمودار گراف G به صورت روبرو می‌باشد. الف) مکمل گراف G را رسم کنید. ب) در گراف مکمل، یک مسیر به طول ۴ بین راس‌های a و e بنویسید. پ) آیا گراف G و مکمل آن، همبند می‌باشند؟   $\overline{G}$ ب) acdbe پ) G ناهمبند $\overline{G}$ همبند

موفق باشید.	جمع نمرات : ۲۰