نام و نام خانوادگی:	وزارت آموزش و پرورش مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌آموزان جوان دبیرستان شهید دکتر شهریاری **امتحانات دیماه** **سال تحصیلی ۱۴۰۳ – ۱۴۰۲**	نمره به عدد: نمره به حروف: امضا دبیر تجدید نظر: به عدد به حروف: امضاء دبیر:
نام درس : **ریاضیات گسسته** تاریخ آزمون: **۱۴۰۲/۱۰/** مدت آزمون: **۱۲۰ دقیقه**		
نام دبیر:	**تعداد صفحه: ۴** شماره صندلی : **تعداد سوال : ۲۰** کلاس :	

۱- درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیررا مشخص کنید .

الف) «حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است» درست

ب) «اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه $4k+1$ مربع کامل است.» درست

ج) «برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد 2^n-1 اول است» نادرست

د) «برای هر دو عدد حقیقی x و y، $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$» نادرست

۱

۲- در جاهای خالی عبارت‌های مناسب بنویسید.

الف) حاصل $([m^2,m],m^5)$ برابر با m^2 است. نسبت به هم اول

ب) اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b داشته باشیم $(a,b)=1$، می‌گوییم a و b ..... هستند.

ج) تعداد یال‌های گراف K_7، برابر ۲۱ است.

د) $[a,b]=c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

۱) $a|c, b|c$ ۲) $\forall m>0, a|m, b|m \Rightarrow c\leq m$

۱

۳- اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+2$ در این صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد (a^2+b^2+3) بر ۸ را بیابید.

a فرد و $a+2$ هم فرد است، پس b یکی از شمارنده‌های $a+2$ است، فردی باشد، پس a^2 و b^2 به صورت $a^2=8k+1$ و $b^2=8k'+1$ نوشت:

$\Rightarrow a^2+b^2+3=8(k+k')+5$ ← مقدار باقی مانده برابر ۵ است.

۱

۴- نامساوی $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\geq\frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ از طریق اثبات بازگشتی، ثابت کنید (x و y دو عدد حقیقی مثبت هستند.)

$x,y>0$:

$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\geq\frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}\geq\frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \Leftrightarrow (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\geq 4\sqrt{xy}$

$\Leftrightarrow x+y+2\sqrt{xy}\geq 4\sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y-2\sqrt{xy}\geq 0$ یا $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geq 0$

که رابطه ای بدیهی درست.

۱

۵- a_1، a_2، a_3 و a_4 و a_5 اعدادی صحیح هستند و b_1، b_2، b_3 و b_4 و b_5 هم همان اعداد ولی به‌ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)(a_4-b_4)(a_5-b_5)$ عددی زوج است.

با برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم حاصل ضرب عددی فرد باشد و این تنها زمان امکان پذیر است که a_i-b_i ها فرد باشند: یعنی تعداد زوج و فردی a_i (یا b_i) کیان است که با توجه فرد بودن تعداد a_i (که ۵ است) این امر امکان پذیر نیست. پس حاصل ضرب حتماً عددی زوج است.

۱

www.kanoon.ir

۶- اگر $7 \mid 6k-1$ باشد ثابت کنید $49 \mid 36k^2 + 44k - 41$

۱

$7 \mid 4k-1 \xrightarrow{\text{تناقض}} 7 \mid k-4 \Rightarrow 7 \mid k+1$

$7 \mid 7k-7$

$\Rightarrow 49 \mid 7k+7 \quad 49 \mid 35k+35$ } $\xrightarrow{\text{جمع}} 49 \mid 36k^2+44k+35$

$7 \mid 4k-1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 49 \mid 36k^2-12k+1$ } $49 \mid -98$

$\xrightarrow{\text{جمع}} \{49 \mid 24k^2+32k-63$

۷- روی منحنی $y = \frac{x^2+4}{2x-1}$ چند نقطه با مختصات صحیح داریم؟

۱

$x \in \mathbb{Z}$

$2x-1 \mid x^2+4 \Rightarrow 2x-1 \mid 4x^2+8$ } $\xrightarrow{\text{تناقض}} 2x-1 \mid x+8 \Rightarrow 2x-1 \mid 2x+16$

$2x-1 \mid 4x^2-x$ } $2x-1 \mid 2x-1$

$\xrightarrow{\text{تناقض}} 2x-1 \mid 17 \Rightarrow 2x-1 = \pm 1, \pm 17 \Rightarrow$ ۴ نقطه با مختصات صحیح

به تقدیر صحیح (x,y) به صورت $(0,-4)$ ، $(1,5)$ ، $(-8,-4)$ و $(9,5)$ هستند.

۸- حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی، ۷ برابر کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌هاست. اگر مجموع آن دو عدد ۸۴ باشد اعداد را بیابید.

۱

d را بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد x و y می‌گیریم، پس داریم:

$x = md, \quad y = nd \Rightarrow [x,y] = mnd$

$xy = 7[x,y] \rightarrow mnd^2 = 7mnd \Rightarrow d = 7$

$x+y = 84 \rightarrow 7m+7n = 7(m+n) = 84 \Rightarrow m+n = 12 \Rightarrow (m,n) = (1,11)$ یا $(5,7)$

پس اعداد x و y یا ۷ و ۷۷ هستند و یا ۳۵ و ۴۹.

۹- در تقسیم عدد صحیح a بر ۱۹۵ باقی‌مانده با ۳ برابر مربع خارج قسمت برابر است. بزرگ‌ترین مقدار a چند است؟

۱

$a = 195q + r \xrightarrow{r = 3q^2} a = 195q + 3q^2$

$0 \le r < 195 \Rightarrow 0 \le 3q^2 < 195 \Rightarrow 0 \le q^2 < 65 \xrightarrow{q \in \mathbb{W}} 0 \le q \le 8$

بیشترین مقدار a به ازای $q=8$ به دست می‌آید:

$a_{max} = 195 \times 8 + 3 \times 64 = 1752$

۱۰- عکس قضیه : اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن‌گاه $a \overset{m}{\equiv} b$ را ثابت کنید.

۱

عکس قضیه: $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow$ باقی‌مانده‌های تقسیم a و b بر m مساوی هستند.

$a \overset{m}{\equiv} x \Rightarrow a = km + x$

$b \overset{m}{\equiv} x \Rightarrow b = k'm + x$ } $\Rightarrow$ باقی‌مانده‌های تقسیم a و b بر m برابر هستند.

www.kanoon.ir

۱۱- اگر n عدد فرد باشد، ثابت کنید $۱۳^n + ۷^n + ۱۹^n$ بر ۳۹ بخش‌پذیر است. ۱

$۱۳^{۲k+۱} + ۷^{۲k+۱} + ۱۹^{۲k+۱} \overset{۳}{\equiv} ۱^{۲k+۱} + ۱^{۲k+۱} + ۱^{۲k+۱} \overset{۳}{\equiv} ۳ \equiv ۰$

$۱۳^{۲k+۱} + ۷^{۲k+۱} + ۱۹^{۲k+۱} \overset{۱۳}{\equiv} ۰ + ۷^{۲k+۱} + (-۷)^{۲k+۱} \overset{۱۳}{\equiv} ۰$

پس بر $۳ \times ۱۳ = ۳۹$ بخش‌پذیر است.

۱۲- اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد، در این صورت سومین سه شنبه بهمن چندم بهمن است؟ ۱

مهر | آبان | آذر | دی | بهمن

۰ | ۳۰ | ۳۰ | ۳۰ | ۱ ⇒ ۱۲۱ روز

$۱۲۱ \overset{۷}{\equiv} ۵۱ \overset{۷}{\equiv} ۲$

پس ۱ بهمن دوشنبه و اولین سه‌شنبه بهمن ۲۰ بهمن است ⇐ سومین سه‌شنبه بهمن ۱۶ بهمن است.

۱۳- جواب معادله‌ی $۱۳x \overset{۱۵}{=} ۲! + ۳! + \ldots + ۸۰!$ را بیابید. ۱

$۱۳x \overset{۱۵}{\equiv} ۲! + ۳! + ۴! + \underbrace{۵! + \ldots + ۸۰!}_{\text{صفر}} \Rightarrow ۱۳x \overset{۱۵}{\equiv} ۳۲ \overset{۱۵}{\equiv} ۱۱۷$

$\Rightarrow ۱۳x \overset{۱۵}{\equiv} ۱۳ \times ۹ \Rightarrow x \overset{۱۵}{\equiv} ۹ \Rightarrow x = ۱۵k + ۹ \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

۱۴- شخصی برای پست کردن نامه‌ای احتیاج به ۲۹۰۰۰ ریال تمبر دارد. اگر تمبرهای موجود، ۲۰۰۰ ریالی (x) و ۵۰۰۰ ریالی (y) باشند، حداقل چه تعداد تمبر برای پست کردن نامه‌اش احتیاج دارد؟ ۲

$۲x + ۵y = ۲۹ \Rightarrow ۵y \overset{۲}{\equiv} ۲۹ \Rightarrow y \overset{۲}{\equiv} ۱ \Rightarrow y = ۲k+۱ \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

جای‌گذاری ← $x = ۱۲ - ۵k$ ← $x, y \geq ۰$ ← $۰ \leq k \leq ۲$

مجموع تعداد تمبرها هم $x + y = ۱۳ - ۳k$ هست که کمترین آن به ازای $k = ۲$ برابر ۷ به دست می‌آید.

۱۵- در هر مورد، عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید. ۱

الف) تعداد رئوس یک گراف را (اندازه، مرتبه) می‌نامیم.

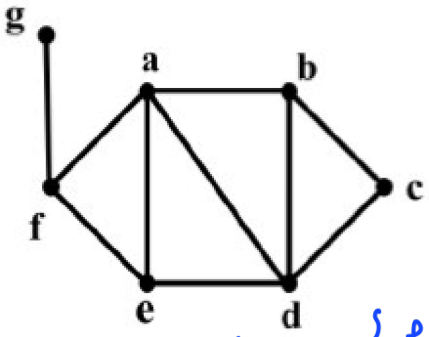
ب) گرافی را همبند می‌نامیم که بین هر دو رأس آن یک (مسیر، یال) وجود داشته باشد.

پ) اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\overline{G})$ برابر با $\left(\frac{n(n-۱)}{۲}, n(n-۱)\right)$ است.

ت) گراف C_n تنها یک (دور، مسیر) n رأسی دارد.

www.konoon.ir

۱۶- گراف G به صورت مقابل رسم شده است. با توجه به این گراف به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) مجموعه $N_G(g)$ را بنویسید.

ب) یک دور به طول ۵ با شروع از رأس a بنویسید.

ج) درجه رأس c در گراف $\overline{G}$ (مکمل گراف G) را مشخص کنید.

۱

الف) $N_G(g) = \{f\}$ ب) abcdea , abdefa

ج) $\deg_G(c) = ۲ \xrightarrow{p=۷} \deg_{\overline{G}}(c) = ۷-۲ = ۵$

۱۷- ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

۰/۵

مجموع درجات گراف برابر $2q$ است، مجموع درجات رأس‌های زوج که عددی زوج است، بنابراین برای اینکه مجموع درجات همه رأس‌ها زوج باشد لازم است تعداد آن‌ها عددی زوج باشد.

۱۸- اگر از یک گراف $(p-۱)$ منتظم از مرتبهٔ p، ۲۲ یال حذف کنیم، به یک گراف $p-۵$ منتظم می‌رسیم. تعداد یال‌های گراف $k_{p+۱}$ را بیابید.

۱

$$\frac{p(p-۱)}{۲} - ۲۲ = \frac{۵p}{۲} \Rightarrow p^۲ - p - ۴۴ = ۵p$$

$$\Rightarrow p^۲ - ۶p - ۴۴ = ۰ \Rightarrow$$

جواب‌های این معادله درجه دوم هستند و جواب برای p به دست نمی‌آید.

۱۹- مجموع مرتبه و اندازهٔ یک گراف کامل برابر با ۱۲۰ است. اندازهٔ این گراف چند است؟

۱

$$p + \frac{p(p-۱)}{۲} = ۱۲۰ \Rightarrow p^۲ + p - ۲۴۰ = (p+۱۶)(p-۱۵) = ۰$$

$$p > ۰ \longrightarrow p = ۱۵$$

اندازه این گراف برابر $\frac{p(p-۱)}{۲} = ۱۰۵$ است.

۲۰- در گراف G که در آن $p = ۸$، $\Delta = ۶$ و $\delta = ۳$، حداکثر q چه‌قدر است؟

۰/۵

گراف با دنباله درجات بیشترین تعداد یال را دارد: ۶,۶,۶,۶,۶,۵,۳

$$q = \frac{۳۶+۸}{۲} = ۲۲$$

موفق باشید ۲۰