ز گهواره تا گور دانش بجوی نام و نام خانوادگی: پایه: **دوازدهم ریاضی** ردیف: نام پدر: کلاس: حوزه امتحانی: مهر ستاد امتحانات دبیرستان	باسمه‌تعالی **اداره کل آموزش و پرورش قم** **مدیریت آموزش و پرورش ناحیه سه قم** **دبیرستان نمونه دولتی شهید فهمیده** **امتحانات نوبت اول سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲**	تاریخ امتحان: ۲۳ / ۱۰ / ۱۴۰۲ مدت امتحان: ۱۱۰ دقیقه ساعت شروع: ۰۰ : ۰۸ تعداد صفحات: ۴ تعداد سوالات: ۱۸	عکس دانش‌آموز
نام درس: ریاضیات گسسته	استاد: علیرضا اکبریان	نمره به عدد: نمره به حروف: امضای دبیر:	شماره صندلی

۱) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را با « د » یا « ن » مشخص کنید. (هر سوال ۰/۲۵ نمره)

الف) برای عدد طبیعی n ، عبارت $n^۲-۵n+۷$ عددی فرد است. .....

ب) حاصل ضرب هر عدد گویا در عددی گنگ، عددی گنگ است. .....

پ) برای اعداد صحیح a و b و c که $a\neq ۰$، اگر $a\mid b+c$ آنگاه $a\mid b$ یا $a\mid c$ .....

ت) هر دو عدد صحیح و متوالی، نسبت به هم اول می‌باشند. .....

۲) جاهای خالی را به طور مناسب کامل کنید. (هر سوال ۰/۲۵ نمره)

الف) در تقسیم مربع هر عدد فرد بر عدد ۸ ، باقیمانده برابر ..... است.

ب) حاصل $(\,[\,m^۲\,,\,m\,]\,,m^۵\,)$ برابر با ..... است.

پ) مجموع سه عدد صحیح متوالی، همواره بر عدد ..... بخش‌پذیر است.

ت) اگر G یک گراف با ۲۰ راس باشد، حاصل $\deg_G(a)+\deg_{\overline{G}}(a)$ برابر ..... است.

ث) اگر یک یال، یک راس را به خود آن راس وصل کند، این یال را ..... می‌نامیم.

ج) با مجموعه راس‌های $V=\{a\,,\,b\,,\,c\,,\,d\,,\,e\}$ ، تعداد ..... گراف ساده می‌توان ساخت.

۳) پ) در سوالات زیر، گزینه درست را انتخاب کنید. (هر سوال ۰/۲۵ نمره)

الف) کدام گزینه درست است؟

۱) $۱۴۰۲\in[۴]_۷$ ۲) $۱۴۰۲\in[۴]_۶$ ۳) $۱۴۰۲\in[۴]_۵$ ۴) $۱۴۰۲\in[۴]_۴$

ب) عدد $\overline{a۲۶a۵۳a۲}$ بر ۹ بخش‌پذیر است. a کدام گزینه است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

پ) اگر معادله سیاله $۲۱x+۳۵y=۲n+۱$ دارای جواب باشد، n کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۳۵ ۲) ۳۶ ۳) ۳۷ ۴) ۳۸

ت) گزینه‌ای که جاهای خالی را در عبارت زیر، به طور مناسب کامل می‌کند، انتخاب کنید.

« در گرافی که ۱۶ راس دارد، تعداد راس‌های زوج، عددی ..... و تعداد راس‌های فرد، عددی ..... است. »

۱) فرد – فرد ۲) فرد – زوج ۳) زوج – فرد ۴) زوج - زوج

www-kanoon-ir

برای سوالات زیر، پاسخ کامل بنویسید.

۴) ثابت کنید اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $۴k+۱$ مربع کامل است. (۱ نمره)

۵) به روش برهان خلف نشان دهید، اگر a عدد صحیح فرد باشد و $b \mid a+۲$ آنگاه b نیز عددی فرد است. (۱ نمره)

۶) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z ، ثابت کنید : $x^۲+y^۲+z^۲ \geq xy+xz+yz$ (۱/۲۵ نمره)

۷) اگر عدد طبیعی a در دو شرط $a \mid ۴k+۹$ و $a \mid ۶k+۱۴$ صدق کند، مقدار a را به دست آورید. (۱ نمره)

۸) اگر باقیمانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۶ و ۵ به ترتیب برابر ۳ و ۲ باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد a را بر ۳۰ بیابید. (۱ نمره)

۹) ثابت کنید : برای اعداد صحیح a و b و c و عدد طبیعی m ، اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ آن‌گاه $ac \overset{m}{\equiv} bc$ (۰/۷۵ نمره)

www-kanoon-ir

۱۰) ثابت کنید عدد $۲۹^{۶۱}-۱۵^{۶۱}-۱۴^{۶۱}$ بر عدد ۲۱۰ بخش‌پذیر است. (۱ نمره)

۱۱) باقی‌مانده تقسیم عدد $۱۹+(۸\times ۷^{۱۲۰})$ را بر عدد ۱۲ به دست آورید. (۱/۲۵ نمره)

۱۲) الف) معادله همنهشتی $۸x \equiv ۲۰ \pmod{۱۲}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید.

ب) کوچکترین عدد سه رقمی که در معادله فوق، صدق می‌کند را به دست آورید. (۱/۲۵ نمره)

۱۳) اول اردیبهشت یک سال، دوشنبه می‌باشد. اول مهرماه همان سال، چه روزی از هفته است؟ سومین سه‌شنبه از مهرماه همان سال، چه تاریخی از ماه می‌باشد؟ (ارائه راه حل، الزامی است.) (۱/۵ نمره)

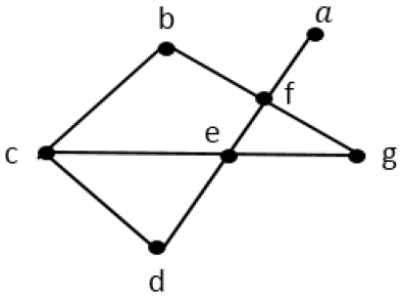
۱۴) اگر بخواهیم ۳۸۰ کیلوگرم برنج را در کیسه‌های ۳۰ و ۴۰ کیلویی بریزیم، حداقل به چند کیسه نیاز داریم؟ (ارائه راه حل، الزامی است.) (۱/۵ نمره)

www.kanoon.ir

۱۵) گراف G از مرتبه ۷ ، از گراف مکمل خودش، ۵ یال بیشتر دارد. تعداد یال‌های گراف G را به دست آورید. (۰/۵ نمره)

۱۶) در گراف ۳ منتظم از مرتبه p رابطه $q=2p-3$ برقرار است. p و q را به دست آورید. (۱ نمره)

۱۷) گراف روبرو داده شده است. (۱/۷۵ نمره)



الف) مرتبه و اندازه گراف را به دست آورید.

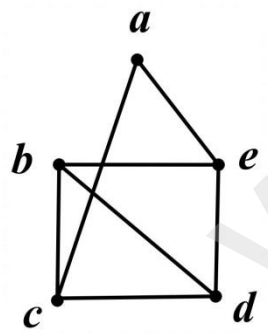
ب) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را بنویسید.

پ) $N_G(c)-N_G[e]$ را بنویسید.

ت) یک مسیر به طول ۵ بین راس‌های b و c بنویسید.

ث) یک دور به طول ۵ در این گراف بنویسید.

۱۸) الف) گراف G به صورت روبرو می‌باشد. مکمل گراف را رسم کنید. (۰/۷۵ نمره)



ب) آیا گراف G و مکمل آن، همبند می‌باشند؟

موفق باشید.	**جمع نمرات : ۲۰**

www-kanoon.ir

ز گهواره تا گور دانش بجوی نام و نام خانوادگی: پایه: **دوازدهم ریاضی** ردیف: نام پدر: کلاس: حوزه امتحانی: مهر ستاد امتحانات دبیرستان	باسمه‌تعالی **اداره کل آموزش و پرورش قم** **مدیریت آموزش و پرورش ناحیه سه قم** **دبیرستان نمونه دولتی شهید فهمیده** **امتحانات نوبت اول سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲**	تاریخ امتحان: ۲۳ / ۱۰ / ۱۴۰۲ مدت امتحان: ۱۱۰ دقیقه ساعت شروع: ۰۰ : ۰۸ تعداد صفحات: ۴ تعداد سوالات: ۱۸	عکس دانش‌آموز
	نام درس: ریاضیات گسسته استاد: علیرضا اکبریان	نمره به عدد: نمره به حروف: امضای دبیر:	شماره صندلی

۱) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را با « د » یا « ن » مشخص کنید. (هر سوال ۰/۲۵ نمره)

الف) برای عدد طبیعی n ، عبارت n^2-5n+7 عددی فرد است. ص

ب) حاصل ضرب هر عدد گویا در عددی گنگ، عددی گنگ است. غ

$\in \mathbb{Q} \quad \in \mathbb{Q}' \quad \in \mathbb{Q}$
$0 \times \sqrt{2} = 0$

پ) برای اعداد صحیح a و b و c که $a \neq 0$، اگر $a \mid b+c$ آنگاه $a \mid b$ یا $a \mid c$ غ

$3/5+4 \not\Rightarrow 3/5$ یا $3/4$

ت) هر دو عدد صحیح و متوالی، نسبت به هم اول می‌باشند. ص

۲) جاهای خالی را به طور مناسب کامل کنید. (هر سوال ۰/۲۵ نمره)

الف) در تقسیم مربع هر عدد فرد بر عدد ۸ ، باقیمانده برابر ۱ است.

ب) حاصل $([m^2, m], m^5)$ برابر با m^2 است.

± 6 یا ± 3 یا ± 2 یا ± 1 یا (عددوسطی) $\pm$

پ) مجموع سه عدد صحیح متوالی، همواره بر عدد ..... بخش‌پذیر است.

ت) اگر G یک گراف با ۲۰ راس باشد، حاصل $\deg_G(a)+\deg_{\overline{G}}(a)$ برابر ۱۹ است.

ث) اگر یک یال، یک راس را به خود آن راس وصل کند، این یال را طوقه می‌نامیم.

ج) با مجموعه راس‌های $V=\{a, b, c, d, e\}$ ، تعداد 2^{10} گراف ساده می‌توان ساخت.

۳) پ) در سوالات زیر، گزینه درست را انتخاب کنید. (هر سوال ۰/۲۵ نمره)

الف) کدام گزینه درست است؟

۱) $1402 \in [4]_7$ ○ ۲) $1402 \in [4]_6$ ✓ ۳) $1402 \in [4]_5$ ○ ۴) $1402 \in [4]_4$

ب) عدد $\overline{a26a53a2}$ بر ۹ بخش‌پذیر است. a کدام گزینه است؟

۱) ۵ ○ ۲) ۴ ○ ۳) ۳ ✓ ۴) ۲ ○

پ) اگر معادله سیاله $21x+35y=2n+1$ دارای جواب باشد، n کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

$(21, 35) \mid 2n+1$

$7 \mid 2n+1$

۱) ۳۵ ○ ۲) ۳۶ ○ ۳) ۳۷ ○ ۴) ۳۸ ✓

ت) گزینه‌ای که جاهای خالی را در عبارت زیر، به طور مناسب کامل می‌کند، انتخاب کنید.

« در گرافی که ۱۶ راس دارد، تعداد راس‌های زوج، عددی ..... و تعداد راس‌های فرد، عددی ..... است. »

۱) فرد – فرد ○ ۲) فرد – زوج ○ ۳) زوج – فرد ○ ۴) زوج – زوج ✓

www.kanoon.ir

برای سوالات زیر، پاسخ کامل بنویسید.

۴) ثابت کنید اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k+1$ مربع کامل است. (۱ نمره)

عدد طبیعی اولی $= n$

دومی $= n+1$

$$4n(n+1)+1 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$$

۵) به روش برهان خلف نشان دهید، اگر a عدد صحیح فرد باشد و $b \mid a+2$ آنگاه b نیز عددی فرد است. (۱ نمره)

فرض خلف : فرض کنیم b عددی فرد نیست

پس b عددی زوج است و چون $b \mid a+2$ پس $a+2$ عددی زوج است. پس a عددی زوج است

فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

۶) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z ، ثابت کنید : $x^2+y^2+z^2 \geq xy+xz+yz$ (۱/۲۵ نمره)

$$2x(x^2+y^2+z^2) \geq 2x(xy+xz+yz)$$

$$2x^2+2y^2+2z^2 \geq 2xy+2xz+2yz$$

$$x^2-2xy+y^2+x^2-2xz+z^2+y^2-2yz+z^2 \geq 0$$

$$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \geq 0$$

۷) اگر عدد طبیعی a در دو شرط $a \mid 4k+9$ و $a \mid 6k+14$ صدق کند، مقدار a را به دست آورید. (۱ نمره)

$$a \mid 4k+9 \xrightarrow{\times 3} a \mid 12k+27$$

$$a \mid 6k+14 \xrightarrow{\times 2} a \mid 12k+28$$

$$\xrightarrow{\text{پایین منهای بالا}} a \mid 1 \longrightarrow a = 1$$

۸) اگر باقیمانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۶ و ۵ به ترتیب برابر ۳ و ۲ باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد a را بر ۳۰ بیابید. (۱ نمره)

$$a = 6k+3 \quad (k \in Z) \xrightarrow{\times 5} 5a = 30k+15$$

$$a = 5k'+2 \quad (k' \in Z) \xrightarrow{\times 6} 6a = 30k'+18$$

$$\xrightarrow{\text{پایین منهای بالا}} a = 30(k'-k)-3$$

$$a = 30(k'-k-1)+27$$

$27 =$ باقیمانده

۹) ثابت کنید : برای اعداد صحیح a و b و c و عدد طبیعی m ، اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ آن‌گاه $ac \overset{m}{\equiv} bc$ (۰/۷۵ نمره)

$$a \overset{m}{\equiv} b \longleftrightarrow a-b = mk \quad (k \in Z) \xleftrightarrow{\times c} ac-bc = m(\underbrace{kc}_{\in Z}) \longleftrightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

www.kanoon.ir

۱۰) ثابت کنید عدد $۲۹^{۶۱}-۱۵^{۶۱}-۱۴^{۶۱}$ بر عدد ۲۱۰ بخش‌پذیر است. (۱ نمره)

$(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n+b^n$

$(۱۵+۱۴)^{۶۱} \overset{۱۵\times۱۴}{\equiv} ۱۵^{۶۱}+۱۴^{۶۱}$

$۲۹^{۶۱} \overset{۲۱۰}{\equiv} ۱۵^{۶۱}+۱۴^{۶۱} \longrightarrow ۲۹^{۶۱}-۱۵^{۶۱}-۱۴^{۶۱} \overset{۲۱۰}{\equiv} ۰$

به کمک بسط دوجمله‌ای خیام

۱۱) باقی‌مانده تقسیم عدد $۷^{۱۲۰}\times۸)+۱۹$ را بر عدد ۱۲ به دست آورید. (۱/۲۵ نمره)

$۷^{۲} \overset{۱۲}{\equiv} ۱$

$(۷^{۲})^{۶۰} \overset{۱۲}{\equiv} ۱^{۶۰}$

$۷^{۱۲۰}\times۸ \overset{۱۲}{\equiv} ۱\times۸$

$(۷^{۱۲۰}\times۸)+۱۹ \overset{۱۲}{\equiv} ۸+۱۹ \overset{۱۲}{\equiv} ۲۷ \overset{۱۲}{\equiv} ۳$

باقیمانده

۱۲) الف) معادله همنهشتی $۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید.

ب) کوچکترین عدد سه رقمی که در معادله فوق، صدق می‌کند را به دست آورید. (۱/۲۵ نمره)

الف

$۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰$ (−۱۲)

$۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۸$ (÷۸)

$x \overset{۳}{\equiv} ۱$ ($(۸,۱۲)=۴$)

$x=۳k+۱$

ب

$۳k+۱ \geq ۱۰۰$

$۳k \geq ۹۹$

$k \geq ۳۳$

$\min k=۳۳$

جواب $=۱۰۰$

۱۳) اول اردیبهشت یک سال، دوشنبه می‌باشد. اول مهرماه همان سال، چه روزی از هفته است؟ سومین سه‌شنبه از مهرماه همان سال، چه تاریخی از ماه می‌باشد؟ (ارائه راه حل، الزامی است.) (۱/۵ نمره)

اردیبهشت، خرداد، تیر، مرداد، شهریور، مهر

$۳۰+۳۱+۳۱+۳۱+۳۱+۱ \overset{۷}{\equiv} ۲+(۴\times۳)+۱ \overset{۷}{\equiv} ۱۵ \overset{۷}{\equiv} ۱$

اول اردیبهشت (دوشنبه) $\xrightarrow{+۱}$ اول مهر (سه‌شنبه)

اول مهر = اولین سه‌شنبه = ۱ مهرماه

سومین سه‌شنبه = دومین = ۸ مهرماه

= سومین = ۱۵ مهرماه

۱۴) اگر بخواهیم ۳۸۰ کیلوگرم برنج را در کیسه‌های ۳۰ و ۴۰ کیلویی بریزیم، حداقل به چند کیسه نیاز داریم؟ (ارائه راه حل، الزامی است.) (۱/۵ نمره)

x = تعداد کیسه‌های ۳۰ کیلویی

y = " ۴۰ " "

$۳۰x+۴۰y=۳۸۰ \longrightarrow ۳x+۴y=۳۸$

$۴y \overset{۳}{\equiv} ۳۸ \longrightarrow y \overset{۳}{\equiv} ۲ \longrightarrow y=۳k+۲$

جایگذاری $\longrightarrow x=-۴k+۱۰$

$x \geq ۰ \longrightarrow -۴k+۱۰ \geq ۰ \longrightarrow k \leq \frac{۱۰}{۴}=\frac{۵}{۲}$

$y \geq ۰ \longrightarrow ۳k+۲ \geq ۰ \longrightarrow k \geq \frac{-۲}{۳}$

k	۰	۱	۲
x	۱۰	۶	۲
y	۲	۵	۸

کمترین تعداد = ۱۰ کیسه

www-kanoon-ir

۱۵) گراف G از مرتبه ۷ ، از گراف مکمل خودش، ۵ یال بیشتر دارد. تعداد یال‌های گراف G را به دست آورید. (۰/۵ نمره)

$$E(G)+E(\bar{G})=\frac{7(7-1)}{2}$$
$$E(G)-E(\bar{G})=5$$
$$\xrightarrow{\text{جمع}} 2E(G)=21+5 \longrightarrow E(G)=13$$

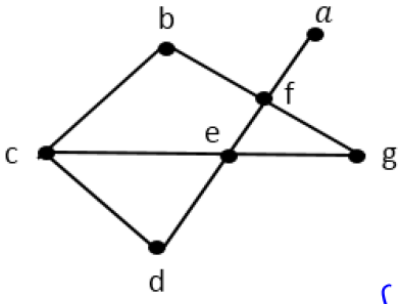
۱۶) در گراف ۳ منتظم از مرتبه p رابطه $q=2p-3$ برقرار است. p و q را به دست آورید. (۱ نمره)

گراف ۳ منتظم از مرتبه p: $q=\frac{3\times p}{2} \longrightarrow 2q=3p$

فرض $q=2p-3 \longrightarrow 2q=4p-6$

$$\Longrightarrow 4p-6=3p \longrightarrow \boxed{p=6} \longrightarrow \boxed{q=9}$$

۱۷) گراف روبرو داده شده است. (۱/۷۵ نمره)



الف) مرتبه و اندازه گراف را به دست آورید.

ب) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را بنویسید.

پ) $N_G(c)-N_G[e]$ را بنویسید.

ت) یک مسیر به طول ۵ بین راس‌های b و c بنویسید.

ث) یک دور به طول ۵ در این گراف بنویسید.

الف) $p=7 \quad q=9$

ب) $\Delta(G)=4 \quad \delta(G)=1$

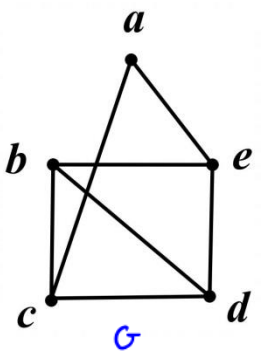
پ) $N_G(c)=\{b,e,d\} \quad N_G[e]=\{e,c,d,f,g\}$

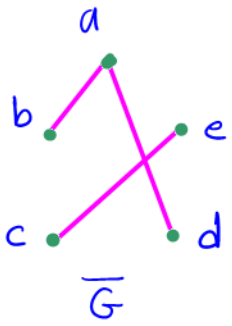
$$N_G(c)-N_G[e]=\{b\}$$

ت) b f g e d c

ث) b c d e f b

۱۸) الف) گراف G به صورت روبرو می‌باشد. مکمل گراف را رسم کنید. (۰/۷۵ نمره)





ب) آیا گراف G و مکمل آن، همبند می‌باشند؟

گراف G همبند است

ولی گراف $\bar{G}$ همبند نیست.

موفق باشید.	جمع نمرات : ۲۰