باسمه تعالی

نام :
نام خانوادگی :
نام استاد : **مسعود امیری**
نام درس: **ریاضیات گسسته**

اداره کل آموزش و پرورش استان گیلان
اداره آموزش و پرورش شهرستان لنگرود

نوبت امتحانی: **اول**
پایه : **دوازدهم ریاضی**
تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۱۰/۲۷
وقت : ۹۰ دقیقه

دبیرستان غیردولتی ایران من

نام و نام خانوادگی دبیر:	نمره به عدد:	تجدید	نام و نام خانوادگی دبیر:	نمره به عدد:
تاریخ و امضا:	نمره به حروف:	نظر	تاریخ و امضا:	نمره به حروف:

ردیف	پیامبر اکرم(ص): « نیکوکاری کامل آن است که در نهان همان را انجام دهی که در آشکارا انجام می دهی»	بارم
۱	درست یا نادرست بودن گزاره های زیر را مشخص کنید. الف) حاصل‌ضرب هر عدد گویا، در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. ب) برای اعداد صحیح a ، b و c که $a\neq 0$ ، اگر $a \mid b+c$ آن گاه $a \mid b$ یا $a \mid c$. ج) معادلهٔ هم نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a,m) \mid b$. د) اگرداشته باشیم $(a,b)=1$ آن‌گاه می‌گوییم؛ a و b نسبت به هم اول‌اند.	۱
....	.....	...
۲	گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید: « برای هر دوعدد حقیقی x و y داریم: $y^2+1 \geq -2x(y+x+1)$ »	۱/۲۵
....	.....	...
۳	ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.	۱/۵
....	.....	...
۴	آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که : $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \qquad (a+b\neq 0)$	۱

www-kanoon.ir

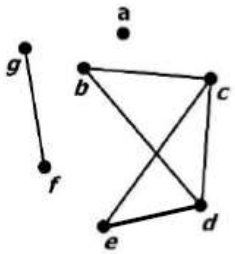
۵ اگر $a>1$ و $a|9k+4$ و $a|5k+3$، ثابت کنید a عددی اول است. ۱/۵

....

۶ **اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، با استفاده از هم نهشتی تعیین کنید ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟** ۱

....

۷ **گراف G (شکل مقابل) را در نظر بگیرید:** ۱/۵



الف) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.

ب) دوری به طول ۴ بنویسید.

پ) دو مسیر به طول ۳ با شروع از راس b بنویسید.

ت) $N_G(f)$ را با اعضا مشخص کنید.

....

۸ **به چند طریق می توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟** ۱/۵

www-kanoon-ir

۹	هر یک از گزاره های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض کنید. الف) برای هر عدد طبیعی n ، عدد $۲^n + ۱$ اول است. ب)مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.	۱
۱۰	معادلهٔ هم‌نهشتی $۱۴۰۲x \overset{۹}{\equiv} ۱۱$ را حل کنید.	۱/۵
۱۱	در هر مورد، عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید. الف) تعداد رئوس یک گراف را (اندازه ، مرتبه) می نامیم. ب) گرافی را همبند می‌نامیم که بین هر دو رأس آن یک (مسیر ، یال) وجود داشته باشد. پ) اگر G یک گراف nرأسی باشد، مقدار $q(G)+q(\overline{G})$ برابر با ($n(n-۱)$ ، $\frac{n(n-۱)}{۲}$) است. ت) گراف C_n تنها یک (دور ، مسیر) nرأسی دارد.	۱
۱۲	به گراف ۸ رأسی ۳-منتظم چند یال اضافه کنیم تا تبدیل به گراف کامل شود ؟ (با راه حل)	۱
۱۳	اگر $a \mid ۲m+۳$ و $a \mid m+۷$ در این صورت چند مقدار صحیح و نامنفی برای a وجود دارد؟	۱/۵

www-kanoon-ir

۱۴	باقی‌مانده تقسیم عدد $A=۶۳^{۱۴}+۱$ را بر ۱۶ به‌دست آورید.	۱/۲۵
....	.....	...
۱۵	ثابت کنید باقیماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۹ ، برابراست با باقیماندهٔ تقسیمِ مجموع ارقام آن عدد بر ۹ .	۱/۵
....	.....	...
۱۶	به روش برهان خلف نشان دهید؛ اگر a عدد صحیحِ فرد باشد و $b \mid a+۲$ ، آن‌گاه b نیز عددی فرد است.	۱

www-kanoon-ir

باسمه تعالی

نام :
نام خانوادگی :
نام استاد : **مسعود امیری**
نام درس: **ریاضیات گسسته**

اداره کل آموزش و پرورش استان گیلان

اداره آموزش و پرورش شهرستان لنگرود

دبیرستان غیردولتی ایران من

نوبت امتحانی: **اول**
پایه : **دوازدهم ریاضی**
تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۱۰/۲۷
وقت : ۹۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی دبیر:	نمره به عدد:	تجدید	نام و نام خانوادگی دبیر:	نمره به عدد:
تاریخ و امضا:	نمره به حروف:	نظر	تاریخ و امضا:	نمره به حروف:

ردیف	پیامبر اکرم(ص): « نیکوکاری کامل آن است که در نهان همان را انجام دهی که در آشکارا انجام می دهی»	بارم

۱ **درست یا نادرست بودن گزاره های زیر را مشخص کنید.**

الف) حاصل‌ضرب هر عدد گویا، در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. نادرست

ب) برای اعداد صحیح a ، b و c که $a\neq 0$ ، اگر $a\mid b+c$ آن گاه $a\mid b$ یا $a\mid c$. نادرست

ج) معادلهٔ هم نهشتی $ax\overset{m}{\equiv}b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a,m)\mid b$. درست

د) اگرداشته باشیم $(a,b)=1$ آن‌گاه می‌گوییم؛ a و b نسبت به هم اول‌اند. درست

۱

.....

۲ **گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:**

« برای هر دوعدد حقیقی x و y داریم: $y^2+1\geq -2x(y+x+1)$ »

$\iff y^2+1\geq -2xy-2x^2-2x \iff y^2+1+2xy+\underbrace{2x^2}_{x^2+x^2}+2x\geq 0$

$\iff x^2+y^2+2xy+x^2+2x+1\geq 0 \iff (x+y)^2+(x+1)^2\geq 0$

همواره برقرار است .

۱/۲۵

.....

۳ **ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم:** $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$.

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab} \iff a+b\geq 2\sqrt{ab} \iff a+b-2\sqrt{ab}\geq 0$

$\iff (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$ برای a و b نامنفی همیشه درست است، وطبق اثبات بازگشتی حکم درست است.

۱/۵

.....

۴ **آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که :** $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ $(a+b\neq 0)$

خیر - فرض می کنیم چنین اعدادی وجود داشته باشند:

$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{b+a}{ab} \Rightarrow (a+b)^2=ab \Rightarrow a^2+b^2+2ab=ab \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+b^2+ab=0 \xrightarrow{\times 2} 2a^2+2b^2+2ab=0 \Rightarrow a^2+a^2+b^2+b^2+2ab=0 \Rightarrow$

$(a+b)^2+a^2+b^2=0 \Rightarrow a=0 \wedge b=0 \wedge a+b=0 \Rightarrow$ تناقض

پس فرض خلف باطل و حکم درست است. یعنی چنین اعدادی وجود ندارند.

۱

www.iran-anjoman.ir

۵ (۱/۵) اگر $a>1$ و $a|9k+4$ و $a|5k+3$، ثابت کنید a عددی اول است.

$a|5k+3 \xrightarrow{\times 9} a|9(5k+3)$ $\xrightarrow{\text{تفاضل}}$ $a|9(5k+3)-5(9k+4)$

$a|9k+4 \xrightarrow{\times 5} a|5(9k+4)$

$\Rightarrow a|27-20 \Rightarrow a|7 \xrightarrow{a>1} a=7 \in P$

---

۶ (۱) اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، با استفاده از هم نهشتی تعیین کنید ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

شهریور + مهر + آبان + آذر + دی + بهمن $= 31 + 4\times 30 + 12 \overset{7}{\equiv} 2$

ج	پ	ج	ش	ی	د	س
6	5	4	3	2	1	0

در جدول برای روز جمعه عدد ۲ می‌نویسیم

۳۱ مرداد ۴ شنبه بوده است.

---

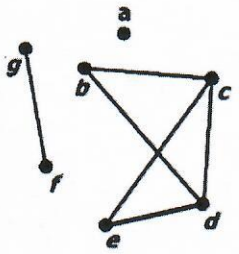
۷ (۱/۵) گراف G (شکل مقابل) را در نظر بگیرید:

الف) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.

ب) دوری به طول ۴ بنویسید.

پ) دو مسیر به طول ۳ با شروع از راس b بنویسید.

ت) $N_G(f)$ را با اعضا مشخص کنید.



الف) $\delta(G)=0$ ، $\Delta(G)=3$

ب) bcedb

پ) bcde ، bdec ، bdce ، bced

ت) $N_G\{f\}=\{g\}$

---

۸ (۱/۵) به چند طریق می توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

x: تعداد اسکناس های ۲۰۰۰ تومانی

y: " " ۵۰۰۰ "

$2000x+5000y=18000$

$\Rightarrow 2x+5y=18$

$\Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 18$ ، $18 \overset{5}{\equiv} 8$

$\Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 2\times 4 \Rightarrow x \overset{5}{\equiv} 4 \Rightarrow x=5k+4$

$\Rightarrow 2(5k+4)+5y=18 \Rightarrow 10k+8+5y=18 \Rightarrow y=-2k+2$

$k=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ ، $k=1 \Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=0 \end{cases}$ ۲ طریق

www.kanoon.ir

۹ هر یک از گزاره های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض کنید. ۱

الف) برای هر عدد طبیعی n ، عدد $2^{2^n}+1$ اول است.

$n=3 \Rightarrow 2^{2^3}+1=9$ مثال نقض ـ نادرست

ب)مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.

ب) $a=2k+1 \Rightarrow a^2=(2k+1)^2=$ درست

$=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2k'+1$

۱۰ معادلهٔ هم‌نهشتی $1402x \overset{9}{\equiv} 11$ را حل کنید. ۱/۵

$(1+4+0+2)x \overset{9}{\equiv} 1+1 \Rightarrow 7x \overset{9}{\equiv} 2 \Rightarrow 7x \overset{9}{\equiv} -7$

$(7,9)=1 \Longrightarrow x \overset{9}{\equiv} -1 \Rightarrow x=9k-1$

۱۱ در هر مورد، عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید. ۱

الف) تعداد رئوس یک گراف را (اندازه ، مرتبه) می نامیم.

ب) گرافی را همبند می‌نامیم که بین هر دو رأس آن یک (مسیر ، یال) وجود داشته باشد.

پ) اگر G یک گراف nرأسی باشد، مقدار $q(G)+q(\overline{G})$ برابر با ($n(n-1)$ ، $\frac{n(n-1)}{2}$) است.

ت) گراف C_n تنها یک (دور ، مسیر) nرأسی دارد.

۱۲ به گراف ۸ رأسی ۳-منتظم چند یال اضافه کنیم تا تبدیل به گراف کامل شود ؟ (با راه حل) ۱

$q=\frac{kn}{2}=\frac{8\times 3}{2}=12$

$q=\frac{n(n-1)}{2}=\frac{8\times 7}{2}=28$

$\Rightarrow 28-12=16$

۱۳ اگر $a \mid 2m+3$ و $a \mid m+7$ در این صورت چند مقدار صحیح و نامنفی برای a وجود دارد؟ ۱/۵

$a \mid m+7 \xrightarrow{\times 2} a \mid 2m+14$

$a \mid 2m+3$

تفاضل $\Rightarrow a \mid 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow a=1 , a=11$

www.kanoon.ir

۱/۲۵

۱۴ باقی‌مانده تقسیم عدد $A=۶۳^{۱۴}+۱$ را بر ۱۶ به‌دست آورید.

$۶۳ \overset{۱۶}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۶۳^{۱۴} \overset{۱۶}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۶۳^{۱۴}+۱ \overset{۱۶}{\equiv} ۱+۱$

$\Rightarrow A \overset{۱۶}{\equiv} ۲ \Rightarrow r=۲$

...

۱/۵

۱۵ ثابت کنید باقیماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۹، برابراست با باقیماندهٔ تقسیمِ مجموع ارقام آن عدد بر ۹.

عدد n رقمی $A=\overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_۲a_۱a_۰}$ را بسط می‌دهیم و در هم ضرب می‌کنیم به پیمانهٔ ۹ به جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار می‌دهیم.

$A=۱۰^{n-1}\times a_{n-1}+\cdots+۱۰^{۲}a_۲+۱۰a_۱+۱۰^{۰}a_۰ \Rightarrow A \overset{۹}{\equiv} ۱\times a_{n-1}+\cdots+۱\times a_۱+a_۰$

$\Rightarrow A \overset{۹}{\equiv} a_{n-1}+\cdots+a_۱+a_۰$

...

۱

۱۶ به روش برهان خلف نشان دهید: اگر a عدد صحیحِ فرد باشد و $b \mid a+۲$، آن‌گاه b نیز عددی فرد است.

فرض می‌کنیم b زوج باشد:

$b=۲k \;,\; b \mid a+۲ \Rightarrow a+۲=bq \Rightarrow a=bq-۲$

پس a زوج است، که با فرض در تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم درست است. یعنی b فرد است.