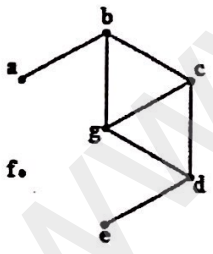
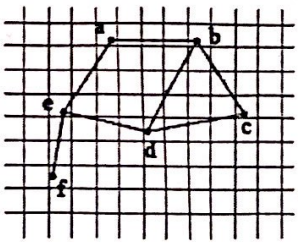
ارزشیابی درس : گسسته نام دبیر : اشتری پایه : دوازدهم رشته: ریاضی نام و نام خانوادگی : شماره کارت :	بسمه تعالی مدیریت آموزش و پرورش منطقه ۴ تهران ارزشیابی نیم سال اول سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۳ دبیرستان دوره دوم پردیس	دبیرستان دوره دوم پردیس تاریخ آزمون : ۱۴۰۳/۱۰/۱۹ مدت زمان پاسخگویی : ۱۰۰ دقیقه

محفل علم و دانش ، باغ بهشت است . امام علی (ع)

فرزندان خوبم با یاد خدا و ذکر صلوات بر پیامبر مهربانی ها و خاندان مطهرش به سوالات زیر با دقت پاسخ دهید.

ردیف	سوالات	بارم
۱	اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha+2\beta$ گنگ است.	۱
۲	ثابت کنید اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آن‌گاه $4k+1$ مربع کامل است.	۱
۳	با استفاده از اثبات بازگشتی نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم: $a^2+b^2 \geq (a-1)(b+1)$	۱
۴	اگر $a>1$ و $a \mid 9k+4$ و $a \mid 5k+3$ ثابت کنید a عددی اول است.	۱
۵	اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(2m-5n)$ بر ۱۷ را محاسبه کنید.	۱
۶	اگر $m,n \in \mathbb{N}$ و $a,b \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید: $m \leq n \, , \, a \mid b \Rightarrow a^m \mid b^n$	۱
۷	اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به‌ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.	۱
۸	باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $200!+\cdots+5!+4!+3!+2!+1!$ را بر ۱۵ به‌دست آورید. (! نماد فاکتوریل است)	۱
۹	باقی‌ماندهٔ تقسیم 13^{22} را بر ۱۷ به‌دست آورید.	۱
۱۰	اگر اول مهرماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟	۱
۱۱	معادلهٔ سیالهٔ $6x+7y=185$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۲
۱۲	معادلهٔ همنهشتی $4x \overset{6}{\equiv} 10$ را در صورت امکان حل کرده و مجموعه جواب آن را به‌دست آورید.	۱/۵
۱۳	اگر دو عدد $(3a-5)$ و $(4a-7)$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکان عدد $(9a+6)$ را به دست آورید.	۱/۵
۱۴	با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) مسیری به طول ۳ از a به c بنویسید. ب) درجهٔ رأس a در گراف $\bar{G}$ را تعیین کنید. پ) یک زیرگراف تهیِ ۵ رأسی از گراف G رسم کنید. 	۲
۱۵	گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است. مرتبهٔ گراف و Δ را مشخص کنید.	۱/۵
۱۶	شکل مقابل، نمودار گراف G می‌باشد. الف) مرتبه و اندازهٔ گراف G را بنویسید. ب) مجموعهٔ $N_G(b)$ را بنویسید. پ) مجموع درجه‌های رأس‌های گراف $\bar{G}$ را مشخص کنید. 	۱/۵

www.karnoon.ir

Scanned with CamScanner

دبیرستان دخترانه شبانه روزی پردیس (دوره دوم)	بسمه تعالی مدیریت آموزش و پرورش منطقه ۴ تهران امتحانات نوبت اول سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۳ دبیرستان دوره دوم پردیس	کلید ارزشیابی درس :گسسته پایه : دوازدهم رشته: ریاضی تاریخ : دی ۱۴۰۳

ردیف	سوالات	بارم

۱ - اگر $\alpha + ۲\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است.

از طرفی طبق فرض $\alpha + \beta$ نیز عددی گویا است.

می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویاست درنتیجه: $(\alpha + ۲\beta) - (\alpha + \beta) = \beta \in \mathbb{Q}$

اما با توجه به فرض مسئله: β گنگ است.

با توجه به تناقض ایجادشده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۲ -

الف) درست

$$k = n(n+1) \Rightarrow k = n^۲ + n \Rightarrow ۴k = ۴n^۲ + ۴n \Rightarrow ۴k + ۱ = ۴n^۲ + ۴n + ۱ \Rightarrow ۴k + ۱ = (۲n+۱)^۲$$

۳ -

$$a^۲ + b^۲ \geq ab + a - b - ۱$$
$$\Leftrightarrow ۲a^۲ + ۲b^۲ - ۲ab - ۲a + ۲b + ۲ \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^۲ + (a-۱)^۲ + (b+۱)^۲ \geq ۰$$

این رابطه همواره برقرار است

۴ - نکته:

۱) اگر عدد a عدد b را عاد کند، آنگاه هر مضرب صحیح عدد b را نیز می‌شمارد.

۲) $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|mb \pm nc$

$$\begin{matrix} a|۹k+۴ \\ a|۵k+۳ \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a|۴۵k+۲۰ \\ a|۴۵k+۲۷ \end{matrix} \Rightarrow a|۷ \rightarrow a = \pm ۱ \text{ یا } \pm ۷ \xrightarrow{a>۱} a = ۷$$

۵ -

$$\left.\begin{matrix} m = ۱۷q + ۵ \ \ (q \in \mathbb{Z}) \\ n = ۱۷q' + ۳ \ \ (q' \in \mathbb{Z}) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (۲m - ۵n) = ۱۷(۲q - ۵q') - ۵ \Rightarrow (۲m - ۵n) = ۱۷(۲q - ۵q' - ۱) + ۱۲ \Rightarrow r = ۱۲$$

۶ -

$$a|b \longrightarrow a^m|b^m \xrightarrow{b \in \pi \, , \, n-m \geq ۰} a^m|b^m \times b^{n-m} \longrightarrow a^m|b^n$$

۷ - طبق فرض می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{matrix} a = ۷k + ۵ \ (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{\times ۸} ۸a = ۵۶k + ۴۰ \\ a = ۸k' + ۷ \ (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{\times ۷} ۷a = ۵۶k' + ۴۹ \end{matrix}\right\}$$
$$\rightarrow a = ۵۶k - ۵۶k' - ۹ \Rightarrow a = ۵۶(k-k') - ۹ \Rightarrow a = ۵۶k'' - ۹$$
$$\Rightarrow a = ۵۶\underbrace{(k''-۱)}_{q} + ۵۶ - ۹ \Rightarrow a = ۵۶q + ۴۷$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۵۶ برابر ۴۷ است.

۸ - می‌دانیم $۱! \overset{۱۵}{\equiv} ۱$ و $۲! \overset{۱۵}{\equiv} ۲$ و $۳! \overset{۱۵}{\equiv} ۶$ و $۴! \overset{۱۵}{\equiv} ۹$ و $۵! \overset{۱۵}{\equiv} ۰$ و ... $۲۰۰! \overset{۱۵}{\equiv} ۰$ پس داریم:

$$۱! + ۲! + ۳! + ۴! + ۵! + \cdots + ۲۰۰! \overset{۱۵}{\equiv} ۱ + ۲ + ۶ + ۲۴ + ۰ + \cdots + ۰ \overset{۱۵}{\equiv} ۳$$

۹ -

$$۱۳ \overset{۱۷}{\equiv} -۴ \rightarrow ۱۳^۲ \overset{۱۷}{\equiv} ۱۶ \overset{۱۷}{\equiv} -۱ \rightarrow ۱۳^{۲۲} \overset{۱۷}{\equiv} -۱ \xrightarrow{-۱ \overset{۱۷}{\equiv} ۱۶} r = ۱۶$$

۱۰ - روزهای هفته دورهٔ گردش هفت روزه دارند بنابراین اگر $b \overset{۷}{\equiv} a$ آن‌گاه a-امین و b-امین روز سال یکسان هستند اگر اول مهر x-امین و ۷ اسفند y-امین روز سال باشند داریم:

$$x = ۶ \times ۳۱ + ۱ \overset{۷}{\equiv} ۵$$

$$y = ۶ \times ۳۱ + ۵ \times ۳۰ + ۷ \overset{۷}{\equiv} ۷$$

بنابراین x-امین روز سال مانند ۵-امین روز سال و y-امین روز سال همانند هفتمین روز سال است. چون x-امین روز سال یکشنبه است پس پنجمین روز سال نیز یکشنبه است پس هفتمین روز سال سه‌شنبه می‌باشد در نتیجه ۷ اسفند هم سه‌شنبه است.

۱۱ -

www.kanoon.ir
Scanned with CamScanner

$$۶x \overset{۷}{\equiv} ۱۸۵ = ۲۳ \times ۷ + ۲۴ \Rightarrow ۶x \overset{۷}{\equiv} ۲۴ \xrightarrow{(۶,۷)=۱} x \overset{۷}{\equiv} ۴$$
$$\Rightarrow x = ۷k + ۴ \Rightarrow ۶(۷k + ۴) + ۷y = ۱۸۵ \Rightarrow y = -۶k + ۲۳$$

۱۲ - چون $۲۰ | (۱۲, ۸)$ معادله جواب دارد.

$$۴x \overset{۶}{\equiv} ۱۰ \rightarrow ۴x \overset{۶}{\equiv} ۴ \rightarrow x \overset{۳}{\equiv} ۱ \rightarrow x = ۳k + ۱$$

۱۳ - طبق فرض داریم:

$$۳a - ۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۴a - ۷ \rightarrow ۱۰ | (۴a - ۷) - (۳a - ۵) \rightarrow ۱۰ | a - ۲ \rightarrow a \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \quad (I)$$
$$\xrightarrow{(I)} ۹a \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \times ۹ \overset{۱۰}{\equiv} ۸ \quad (II)$$
$$\xrightarrow{(II)} ۹a + ۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۸ + ۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۴$$

۱۴ -

الف

$abgc$

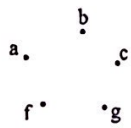
می‌دانیم اگر u و v دو رأس از گراف G باشند، یک مسیر از u به v (یک $v - u$ مسیر) در G دنباله‌ای از رئوس دوبه‌دو متمایز در G است که از u شروع و به v ختم می‌شود به‌طوری که هردو رأس متوالی این دنباله در G مجاور هم باشند. طول یک مسیر برابر است با تعداد یال‌های موجود در آن مسیر (یکی کمتر از تعداد رئوس موجود در آن مسیر).

ب

$$\deg_G(a) + \deg_{\overline{G}}(a) = p - ۱ \Rightarrow ۱ + \deg_{\overline{G}}(a) = ۶ \Rightarrow \deg_{\overline{G}}(a) = ۵$$

ب

یک زیرگراف از گراف G، گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ رئوس گراف G و مجموعهٔ یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ یال‌های G باشد.



۱۵ -

$$q(K_p) = \frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow \frac{p(p-۱)}{۲} = ۳۶ \Rightarrow p = ۹ \ , \ \Delta = p - ۱ = ۸$$

۱۶ -

الف

$$p = ۶ \ , \ q = ۷$$

ب

$$N_G(b) = \{a, d, c\}$$

ب

$$q(G) + q(\overline{G}) = \frac{p(p-۱)}{۲} \overset{p=۶}{=\!=} ۱۵$$

$$q(\overline{G}) + ۷ = ۱۵$$

$$\Rightarrow q(\overline{G}) = ۸ \Rightarrow \overline{G} \text{ مجموع درجه‌های رئوس گراف} = ۱۶$$

گسسته پایان ترم

Scanned with CamScanner