Kanoon.ir

**شما با دانلود این نمونه سوال، کد تخفیف خرید کتاب از سایت کانون بوک دریافت می کنید.**

**برای دریافت کد جایزه خود، عدد 33 را به سر شماره 90008451 ارسال کنید.**




***تمرین بیشتر نمونه سوالات امتحانی با کتاب های پرتکرار***

***همین حالا جایزه خود را دریافت کنید.***

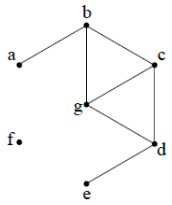
kanoonBook.ir

www.kanoon.ir

| نام و نام خانوادگی: | باسمه تعالی<br>اداره سنجش و ارزشیابی تحصیلی<br>مدیریت آموزش و پرورش ناحیه یک شیراز<br>مجتمع آموزشی فرهنگی امام رضا علیه السلام | **برگه سوالات – امتحانات دی ماه**<br>درس: ریاضیات گسسته<br>۱۴۰۳ / ۱۰ / ۲۴ ۱۰:۰۰ صبح<br>۱۱۰ دقیقه ۲ صفحه ۱۶ سوال |
|---|---|---|
| **پایه:** دوازدهم ریاضی | | |

| ردیف | سوالات | نمره |
|---|---|---|
| ۱ | اگر $\alpha$ و $\beta$ دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha+2\beta$ گنگ است. | ۱ |
| ۲ | اگر $m,n\in\mathbb{N}$ و $a,b\in\mathbb{Z}$ ثابت کنید:<br>$m\le n\ ,\ a\mid b\Rightarrow a^m\mid b^n$ | ۱ |
| ۳ | اگر عدد طبیعی $a$ دو عدد $(5k+9)$ و $(8k+13)$ را عاد کند، ثابت کنید: $a=1$ یا $a=7$. | ۱/۵ |
| ۴ | اگر $p\neq q$ و $p$ و $q$ هر دو عدد اول باشند، ثابت کنید $(p,q)=1$. | ۱ |
| ۵ | ثابت کنید اگر $p>3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p=6k+1$ یا $p=6k+5$ $(k\in\mathbb{W})$ نوشته می‌شود. | ۱/۵ |
| ۶ | اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $a$ بر دو عدد ۶ و ۵ به‌ترتیب ۳ و ۲ باشد؛ باقی‌ماندهٔ تقسیم $a$ را بر ۳۰ بیابید. | ۱ |
| ۷ | اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دو بر عدد صحیح $n$ بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم نیز همواره بر $n$ بخش‌پذیر است. | ۱ |
| ۸ | اگر $a$ عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح $a$ یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش‌پذیر است. | ۱/۵ |
| ۹ | باقی‌ماندهٔ تقسیم $7^{30}$ بر ۱۵ را به‌دست آورید. | ۱ |
| ۱۰ | اگر $a$ و $b$ عددی صحیح و فرد باشند، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(a^2+b^2+5)$ را بر ۸ بیابید. | ۱ |
| ۱۱ | معادلهٔ همنهشتی $3x\overset{7}{\equiv}13$ را حل و جواب عمومی آن را به‌دست آورید. | ۱ |
| ۱۲ | معادله سیاله $2x+5y=19$ را حل کنید. | ۱/۵ |
| ۱۳ | گراف $G$ با مجموعه رأس‌های $V=\{a,b,c,d,e,f\}$ و مجموعه یال‌های $E=\{ab,bc,cd,ed,ae,cf,ef\}$ را در نظر بگیرید:<br>الف) نمودار گراف را رسم کنید. ب) $N_G[b]$ را مشخص کنید. پ) یک مسیر به طول ۵ از $b$ به $d$ بنویسید. | ۱/۵ |
| ۱۴ | اگر درجات رئوس گراف $G$ به‌صورت ۲, ۲, ۲, ۳, ۳, ۳, ۴, ۵ باشد، اندازهٔ گراف $\bar{G}$ چقدر است؟ | ۱ |
| ۱۵ | یک گراف کامل دارای ۵۵ یال است. درجهٔ هر رأس را بیابید. | ۱ |

www-kanoon-ir

| | | |
|---|---|---|
| ۱۶ | با توجه به گراف $G$ (شکل مقابل) به سؤالات زیر پاسخ دهید.<br><br><br>**الف** مسیری به طول ۳ از $a$ به $c$ بنویسید.<br>**ب** یک دور به طول ۴ مشخص کنید.<br>**پ** درجهٔ رأس $a$ در گراف $\overline{G}$ را تعیین کنید.<br>**ت** آیا گراف $G$ همبند است؟ چرا؟<br>**ث** یک زیرگراف تهیِ ۵رأسی از گراف $G$ رسم کنید. | ۲/۵ |
| | **جمع نمرات** | ۲۰ |
| | **با آرزوی توفیق برای شما** | |

www-kanoon-ir

# پاسخنامه تشریحی

۱ - اگر $\alpha + ۲\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است.

از طرفی طبق فرض $\alpha + \beta$ نیز عددی گویا است.

می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویاست درنتیجه: $(\alpha + ۲\beta) - (\alpha + \beta) = \beta \in \mathbb{Q}$

اما با توجه به فرض مسئله: $\beta$ گنگ است.

با توجه به تناقض ایجادشده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۲ -

$$a|b \longrightarrow a^m|b^m \xrightarrow{b\in\pi\ ,\ n-m\geq ۰} a^m|b^m \times b^{n-m} \longrightarrow a^m|b^n$$

۳ -

$$\begin{cases} a|۵k+۹ \\ a|۸k+۱۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a|۴۰k+۷۲ \\ a|۴۰k+۶۵ \end{matrix} \Rightarrow a|۷ \Rightarrow a=۱ \vee a=۷$$

۴ - فرض کنیم $(p,q)=d$ و $d \neq ۱$ بنابراین داریم:

$$d|p\ ,\ d|q \xrightarrow{\text{اول } q,p,d\neq ۱} d=p\ ,\ d=q \longrightarrow p=q$$

حال با توجه به اینکه $p=q$ با فرض مسئله در تناقض است نتیجه می‌گیریم $d=۱$.

۵ - هرگاه $p$ را بر ۶ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$p=۶k\ \ (۱)\quad ,\quad p=۶k+۱\ \ (۲)\quad ,\quad p=۶k+۲=۲(۳k+۱)\ \ (۳)$$

$$p=۶k+۳=۳(۲k+۱)\ \ (۴)\quad ,\quad p=۶k+۴=۲(۳k+۲)\ \ (۵)\quad ,\quad p=۶k+۵\ \ (۶)$$

$p$ در حالات (۱)، (۳) و (۵) زوج و در (۴) بر ۳ بخش‌پذیر است که با اول بودن $p$ تناقض دارد. بنابراین فقط در حالات (۲) یا (۶)، $p$ می‌تواند عددی اول باشد که حکم اثبات می‌شود.

۶ - بنابر قضیهٔ تقسیم داریم:

$$\begin{cases} a=۵q+۲ \\ a=۶q'+۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۶a=۳۰q+۱۲ \\ ۵a=۳۰q'+۱۵ \end{cases} \Rightarrow a=۳۰q''-۳$$

$$\Rightarrow a=۳۰r+۲۷$$

۷ - طبق فرض به‌ازای اعداد صحیح $q_۱$ و $q_۲$ داریم: $a=nq_۱$ و $b=nq_۲$.

$$a=bq+r \rightarrow nq_۱=nq_۲q+r \rightarrow r=nq_۱-nq_۲q=n(q_۱-q_۲q)$$

بنابراین $r$ هم بر $n$ بخش‌پذیر است.

۸ - برای عدد صحیح و دلخواه $a$ یکی از ۳ حالت زیر را داریم:

(۱) اگر $a=۳k$ آنگاه $۳|a$.

(۲) اگر $a=۳k+۱$ آنگاه $۳|a+۲$.

(۳) اگر $a=۳k+۲$ آنگاه $۳|a+۴$.

۹ -

$$۷^۲=۴۹ \overset{۱۵}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۷^۴ \overset{۱۵}{\equiv} ۱۶ \overset{۱۵}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۷^{۲۸} \overset{۱۵}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۷^۲ \overset{۱۵}{\equiv} ۴} ۷^{۳۰} \overset{۱۵}{\equiv} ۴$$

۱۰ - می‌دانیم مربع هر عدد فرد، به‌صورت $۸k+۱$ است. $(k \in Z)$ پس داریم:

$$\begin{cases} a^۲=۸k+۱ \\ b^۲=۸k'+۱ \end{cases} \rightarrow a^۲+b^۲+۵=۸k+۱+۸k'+۱+۵ \rightarrow a^۲+b^۲+۵=۸k''+۷ \rightarrow r=۷$$

۱۱ -

نکته : $ac \overset{m}{\equiv} bc\ ,\ (c,m)=d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

$$۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳ \Rightarrow ۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳-۷ \Rightarrow ۳x \overset{۷}{\equiv} ۶ \xrightarrow{(۳,۷)=۱} x \overset{۷}{\equiv} ۲ \Rightarrow x=۷k+۲$$

۱۲ - معادله سیاله جواب دارد زیرا: $(۲,۵)|۱۹ \Rightarrow ۱$ پس داریم:

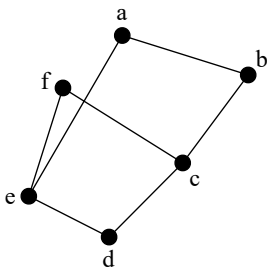
$$۲x \overset{۵}{\equiv} ۱۹ \overset{۵}{\equiv} ۴ \xrightarrow{(۲,۵)=۱} x \overset{۵}{\equiv} ۲ \Rightarrow x=۵k+۲ \xrightarrow{۲x+۵y=۱۹} ۲(۵k+۲)+۵y=۱۹ \Rightarrow y=-۲k+۳$$

www-kanoon-ir

۱۳ -

**الف**

نمودار گراف به‌صورت مقابل است:




**ب**

$N_G[b] = \{a, b, c\}$

**پ**

مسیر به طول ۵ از $b$ به $d$: $baefcd$

۱۴ -

$$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = ۲q \Rightarrow ۵ + ۴ + ۳ + ۳ + ۳ + ۲ + ۲ + ۲ = ۲q \Rightarrow q = ۱۲$$

$$q + \bar{q} = \frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow ۱۲ + \bar{q} = \frac{۸ \times ۷}{۲} \Rightarrow ۱۲ + \bar{q} = ۲۸ \rightarrow q = ۱۶$$

۱۵ -

$$q = \frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow ۵۵ = \frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow p(p-۱) = ۱۱۰ = ۱۱ \times ۱۰ \Rightarrow p = ۱۱$$

گراف کامل مرتبهٔ ۱۱ است، پس $(۱۱ - ۱) = ۱۰$ منتظم است. یعنی درجهٔ هر رأس ۱۰ است.

۱۶ -

**الف**

$abgc$

می‌دانیم اگر $u$ و $v$ دو رأس از گراف $G$ باشند، یک مسیر از $u$ به $v$ (یک $u - v$ مسیر) در $G$ دنباله‌ای از رئوس دوبه‌دو متمایز در $G$ است که از $u$ شروع و به $v$ ختم می‌شود به‌طوری که هردو رأس متوالی این دنباله در $G$ مجاور هم باشند. طول یک مسیر برابر است با تعداد یال‌های موجود در آن مسیر (یکی کمتر از تعداد رئوس موجود در آن مسیر).

**ب**

$bcdgb$

می‌دانیم: دنبالهٔ $v_۱v_۲ \cdots v_nv_۱$ $(n \geq ۳)$ از رئوس دوبه‌دو متمایز که در آن هر رأس با رأس‌های بعدی مجاور است را یک دور به طول $n$ می‌نامیم.

**پ**

$$\deg_G(a) + \deg_{\bar{G}}(a) = p - ۱ \Rightarrow ۱ + \deg_{\bar{G}}(a) = ۶ \Rightarrow \deg_{\bar{G}}(a) = ۵$$

**ت**

خیر - زیرا به‌عنوان مثال از $f$ به $a$ مسیری وجود ندارد.

**ث**

یک زیرگراف از گراف $G$، گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ رئوس گراف $G$ و مجموعهٔ یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ یال‌های $G$ باشد.

