بـاسمـه تـعـالـی

نام و نام خانوادگی:	اداره کل آموزش و پرورش استان قزوین مدیریت آموزش پرورش ناحیه یک قزوین دبیرستان فرهنگ	تـاریـخ امـتـحـان : ۱۴۰۴/۱۰/۱۶
کلاس و پایه: دوازدهم ریاضی		مـدت امـتـحـان : ۸۵ قیقه
نام دبیر: جهان بخش	سوالات درس : ریـاضیـات گسسته	تـعـداد صـفـحـه فحات: ۲ مـاره : ۱
نمره به عدد:	امضای دبیر:	مهر مدرسه
نمره به حروف:		

۱) هر یک از گزاره‌های زیر را **اثبات** و یا با **مثال نقض** رد کنید. **(۲ نمره)**

الف) مجموع ۳ عدد فرد، عددی فرد است.

ب) اگر $a|b+c$ آنگاه $a|b$ یا $a|c$

پ) عدد 145673 بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

ت) تعداد رئوس زوج هر گراف عددی فرد است.

.....

۲) جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. **(۲ نمره)**

الف) دسته همنهشتی عدد ۱۴۰۳ به پیمانه ۳ برابر ..... است.

ب) اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و ..... آنگاه $a \overset{m}{\equiv} b$.

پ) تعداد یال‌های گراف ۳-منتظم ۱۰ رأسی برابر ..... است.

ت) اگر در گرافی ۸ رأسی، ۱۲ یال داشته باشد، تعداد یال‌های گراف مکمل برابر ..... است.

.....

۳) اگر α و β دو عدد گنگ ولی $\alpha + 2\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است. **(۲ نمره)**

.....

۴) اگر x و y دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که $x + y < 0$، آنگاه با اثبات بازگشتی نشان دهید که **(1/5 نمره)**

$$x^3 + y^3 \leq x^2y + xy^2$$

.....

۵) الف) اگر عددی مانند k در $\square$ باشد که $3|5k+1$، ثابت کنید: $9|25k^2 - 5k - 2$ **(1/5 نمره)**

ب) اگر $a > 1$ عددی طبیعی باشد و $a|5k+6$ و $a|3k+5$، ثابت کنید a عددی اول است. **(1/5 نمره)**

www-kanoon-ir

۶) اگر باقیمانده تقسیم a بر دو عدد 5 و 6 به ترتیب برابر 3 و 5 باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر 30 را به دست آورید. **(1/5 نمره)**

۷) اگر اول مهرماه سالی **دوشنبه** باشد، اول اسفند آن سال چندشنبه است؟**(1 نمره)**

۸) معادلات زیر را حل کنید. **(۲ نمره)**

الف) $1403x \overset{7}{\equiv} 11$

ب) $5x + 11y = 37$

۹) به چند طریق می‌توان 27000 تومان را به اسکناس‌های 5000 و ۲۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟**(1/5 نمره)**

۱۰) با توجه به گراف زیر به سوالات پاسخ دهید. **(3/5 نمره)**

الف) مرتبه و اندازهٔ گراف را تعیین کنید.

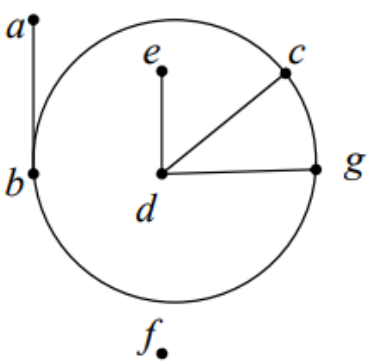
ب) یک مسیر به طول ۳ از a به c بنویسید.

پ) یک دور به طول ۴ در آن بیابید.

ت) همبندی و ناهمبندی این گراف و مکمل آن را با ذکر دلیل بررسی کنید.

ث) چند یال به آن بیافزاییم تا کامل شود؟

ج) $N_G(c)$ و نیز $\delta(\bar{G})$ را بیابید.



www-kanoon-ir

پاسخنامه

۱) هر یک از گزاره‌های زیر را **اثبات** و یا با **مثال نقض** رد کنید. (**۲ نمره**)

الف) مجموع ۳ عدد فرد، عددی فرد است. ✓

$(2k+1)+(2k'-1)+(2k''+1)=2(k+k'+k'')+1=2q+1$

ب) اگر $a|b+c$ آنگاه $a|b$ یا $a|c$ ✗

$2|1+3$ ، $2\nmid 1$ ، $2\nmid 3$

پ) عدد $\underline{145673}$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است. ✓

$14567 \overset{11}{\equiv} 7-6+5-4+1-0$

ت) تعداد رئوس زوج هر گراف عددی فرد است. ✗

۴ رأس زوج دارد

---

۲) جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. (**۲ نمره**)

الف) دسته همنهشتی عدد ۱۴۰۳ به پیمانه ۳ برابر .....[۲]$_3$..... است.

ب) اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و .....$(m,c)=1$..... آنگاه $a \overset{m}{\equiv} b$.

پ) تعداد یال‌های گراف ۳-منتظم ۱۰ رأسی برابر .....۱۵..... است.

ت) اگر در گرافی ۸ رأسی، ۱۲ یال داشته باشد، تعداد یال‌های گراف مکمل برابر .....۱۶..... است.

$q(G)+q(\bar{G})=\frac{p(p-1)}{2}$

---

۳) اگر α و β دو عدد گنگ ولی $\alpha+2\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ گنگ است. (**۲ نمره**)

برهان خلف: فرض کنید $(\alpha-\beta)$ گویا باشد در این صورت چون جمع و تفریق در اعداد گویا، گویاست، داریم:

$(\alpha+2\beta)-(\alpha-\beta)=3\beta\in\mathbb{Q} \Rightarrow \beta\in\mathbb{Q}$

که تناقض است. پس فرض خلف باطل است و حکم برقرار است.

---

۴) اگر x و y دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که $x+y<0$ آنگاه با اثبات بازگشتی نشان دهید که $x^3+y^3\le x^2y+xy^2$ (**1/5 نمره**)

$x^3+y^3\le x^2y+xy^2 \iff (x+y)(x^2-xy+y^2)\le xy(x+y) \overset{\div(x+y)}{\iff}$

$x^2-xy+y^2\ge xy \iff x^2-2xy+y^2\ge 0 \iff (x-y)^2\ge 0$ همواره درست

---

۵) **الف)** اگر عددی مانند k در $\square$ باشد که $3|5k+1$، ثابت کنید: $9|25k^2-5k-2$ (**1/5 نمره**)

$3|5k+1 \xrightarrow[\times 3]{\text{توان ۲}} \begin{cases} 9|25k^2+10k+1 \\ 9|15k+3 \end{cases} \longrightarrow 9|(25k^2+10k+1)-(15k+3) \Rightarrow 9|25k^2-5k-2$

ب) اگر $a>1$ عددی طبیعی باشد و $a|5k+6$ و $a|3k+5$، ثابت کنید a عددی اول است. (**1/5 نمره**)

$\begin{cases} a|5k+6 \\ a|3k+5 \end{cases} \xrightarrow[\times 5]{\times 3} \begin{cases} a|15k+18 \\ a|15k+25 \end{cases} \overset{\text{تفاضل}}{\Rightarrow} a|7 \overset{a>1}{\Rightarrow} a=7$ ✓

---

۶) اگر باقیمانده تقسیم a بر دو عدد 5 و 6 به ترتیب برابر 3 و 5 باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر 30 را به دست آورید. (**1/5 نمره**)

$\begin{cases} a=5k+3 \\ a=6k'+5 \end{cases} \xrightarrow[\times 5]{\times 6} \begin{cases} 6a=30k+18 \\ 5a=30k'+25 \end{cases} \overset{\text{تفاضل}}{\Rightarrow} a=30k-30k'-7+30-30$

$\Rightarrow a=30(k-k'-1)+23=30t+23$

$r=23$

www.kanoon.ir

۷) اگر اول مهرماه سالی **دوشنبه** باشد، اول اسفند آن سال چندشنبه است؟(**1 نمره**)

$d = ۲۹ + ۴ \times ۳۰ + ۱ = ۱۵۰ \overset{۷}{\equiv} ۳$

ی	ش	ج	چ	پ	س	د
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

اول اسفند، سه روز بعد از دوشنبه یعنی پنج‌شنبه است.

۸) معادلات زیر را حل کنید. (**۲ نمره**)

الف) $1403x \overset{7}{\equiv} 11$

$۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۸ \Rightarrow x \overset{۷}{\equiv} ۶ \Rightarrow x = ۷k + ۶$

ب) $5x + 11y = 37$

$۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۲۷ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۵ \xrightarrow{\div ۵} x \overset{۱۱}{\equiv} ۳ \Rightarrow x = ۱۱k + ۳$

$۵(۱۱k+۳) + ۱۱y = ۳۷ \Rightarrow ۱۱y = ۲۲ - ۵۵k \Rightarrow y = ۲ - ۵k$

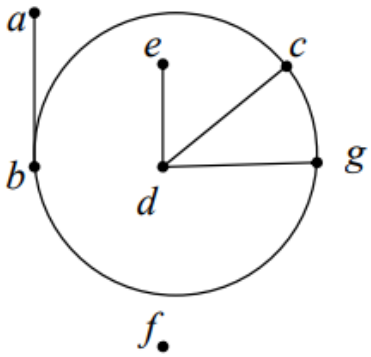
۹) به چند طریق می‌توان 27000 تومان را به اسکناس‌های 5000 و ۲۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟(**1/5 نمره**)

$۵۰۰۰x + ۲۰۰۰y = ۲۷۰۰۰ \Rightarrow ۵x + ۲y = ۲۷ \Rightarrow ۵x \overset{۲}{\equiv} ۲۷ \Rightarrow x \overset{۲}{\equiv} ۱ \Rightarrow x = ۲k + ۱$

$۵(۲k+۱) + ۲y = ۲۷ \Rightarrow ۲y = ۲۲ - ۱۰k \Rightarrow y = ۱۱ - ۵k$ $\quad k = ۰, ۱, ۲$

به سه طریق

۱۰) با توجه به گراف زیر به سوالات پاسخ دهید. (**3/5 نمره**)



الف) مرتبه و اندازهٔ گراف را تعیین کنید. $p = ۷, q = ۹$

ب) یک مسیر به طول ۳ از a به c بنویسید. $abgc$

پ) یک دور به طول ۴ در آن بیابید. $dcbgd$

ت) همبندی و ناهمبندی این گراف و مکمل آن را با ذکر دلیل بررسی کنید.

این گراف ناهمبند است. زیرا هیچ مسیری از آن به سایر رئوس وجود ندارد. اما این رأس در گراف مکمل به همه متصل است پس $\bar{G}$ همبند است.

ث) چند یال به آن بیافزاییم تا کامل شود؟

$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{۲} \Rightarrow q(\bar{G}) + ۹ = ۲۱ \Rightarrow$

ج) $N_G(c)$ و نیز $\delta(\bar{G})$ را بیابید.

$N_G(c) = \{b, d, g\}$ $\quad \delta(\bar{G}) = ۳$