بسمه تعالی

نام و نام خانوادگی:	امتحان شبه‌نهایی ریاضیات گسسته دوازدهم ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح
نام مدرسه:	نوبت دوم — سوالات پاسخ‌برگ دارد.	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
شهرستان:	استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد.	تاریخ: ۱۴۰۲/۰۱/۲۸

۱	درست یا نادرست بودن عبارات زیر را مشخص کنید. الف) اگر α یک عدد گویا و β گنگ باشد، $3\alpha+\beta$ همواره گنگ است. ب) مجموعهٔ احاطه‌گر یک گراف تهی، مینیمال است. ج) اگر n عددی صحیح باشدآنگاه $3 \mid n^3-n$. د) دو مربع لاتین متعامد 6×6 وجود دارد.	۱
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب پُر کنید. الف) مجموعه احاطه‌گر مینیمم یک گراف کامل، ..... عضو دارد. ب) اگر $6 \mid a$ و $d=(-2,a)$ آن‌گاه d برابر ..... است. ج) یک گراف را ناهمبند گوییم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک .... وجود داشته باشد. د) تعداد حالات انتخاب ۵ شاخه گل از بین سه نوع گل طوری که از هر نوع، حداقل یک شاخه داشته باشیم برابر ..... است.	۱
۳	در سؤالات زیر گزینهٔ صحیح را انتخاب کنید. الف) باقیماندهٔ تقسیم اعداد a و b بر ۱۷ به ترتیب ۲ و ۱۱ است، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $3a-5b$ را بر ۱۷ کدام است؟ ۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱ ب) عدد احاطه‌گری گراف G از مرتبهٔ ۱۰ و اندازهٔ ۴۰ کدام است؟ ۱) ۳ ۲) ۲ ۳) حداقل یک است ۴) ۱ ج) معادلهٔ $21x+35y=2n+1$ به ازای کدام عدد طبیعی n، در $\mathbb{Z}$ جواب دارد؟ ۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۵ ۴) ۱۳	۱/۵
۴	برای هر دو عدد حقیقی و نامنفی a, b ثابت کنید: $\frac{a+3b}{2} \geq \sqrt{3ab}$	۱
۵	برای هر یک مثال نقض بیاورید. الف) اگر x گنگ باشدآنگاه x^2+6x+5 نیز گنگ است. ب) تعداد اعضای مجموعه احاطه‌گر مینیمم گراف k- منتظم از مرتبه n برابر $\left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil$ می‌باشد.	۱
۶	اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $c \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید $a+c \overset{m}{\equiv} b+c$.	۱
۷	معادلهٔ $3x+5y=121$ را در $\mathbb{Z}$ حل کنید.	۱
۸	رقم یکان $3^{1399}-5$ را بیابید.	۱/۵
۹	در هر مورد، گرافی با مشخصات خواسته شده رسم کنید. الف) مرتبهٔ ۶ با حداقل یال و عدد احاطه گری آن یک باشد. ب) همبند، بدون دور از مرتبهٔ ۵ که در آن $\Delta=3$ باشد. ج) ۴ رأسی که یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد.	۱/۵

www-kanoon-ir

CamScanner

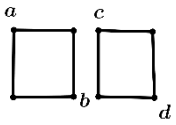
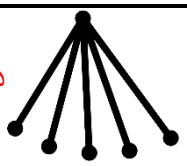
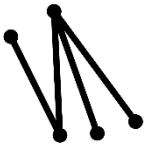
۱۰	با توجه به گراف G ، به سوالات زیر پاسخ دهید. (محاسبات لازم است) الف) $\Delta(G)=$ $\delta(G)=$ $\deg(c)=$ ب) دوری به طول ۴ بنویسید. ج) حداقل چند یال دیگر به این گراف اضافه کنیم تا گراف ۵- منتظم از همین مرتبه بدست آید؟ د) اگر $N_G(x)=\{b,d,c\}$ ، آنگاه x کدام رأس است؟	۲
۱۱	با توجه به گراف مقابل به سوالات زیر پاسخ دهید. الف) کران پایین عدد احاطه گری را بنویسید. ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی بنویسید. ج) یک γ- مجموعه بنویسید. آیا این مجموعه یکتاست؟	۱/۵
۱۲	۶ دانش‌آموز و ۵ معلم به چند طریق می‌توانند کنار هم در یک ردیف برای گرفتن عکس قرار بگیرند به طوری که: الف) همهٔ معلم‌ها کنار هم قرار گیرند. ب) دانش‌آموزان یک در میان بین معلم‌ها قرار بگیرند.	۱
۱۳	شش توپ فوتبال یکسان، سه توپ والیبال یکسان و یک توپ بسکتبال را به چند طریق می‌توان بین ۱۰ نفر توزیع کرد طوری که هر کدام یک توپ داشته باشند؟	۱
۱۴	تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ $x_1+4x_2+x_3+x_4=21$ را با شرایط $x_1>1$ و $x_2\geq 3$ بدست آورید.	۲
۱۵	دو مربع لاتین A و B را در نظر بگیرید: $A=$ $B=$ الف) آیا A و B متعامدند؟ چرا؟ ب) یک مربع لاتین مانند C به گونه‌ای بنویسید که A و C متعامد باشند. ($B\neq C$) روش کار را توضیح دهید.	۲

۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳

۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱

www.kanoon.ir

CamScanner

ردیف	راهنمای آزمون	نمره
۱	الف) درست ۰/۲۵ ب) درست ۰/۲۵ ج) درست ۰/۲۵ د) نادرست ۰/۲۵	۱
۲	الف) یک ۰/۲۵ ب) ۲ ۰/۲۵ ج) مسیر ۰/۲۵ د) $\binom{۴}{۲} = ۶$ ۰/۲۵	۱
۳	الف) گزینه ۳ ۰/۵ ب) گزینه ٤ ۰/۵ ج) گزینه۲ ۰/۵	۱/۵
٤	$\frac{a+۳b}{۲} \geq \sqrt{۳ab} \Leftrightarrow a+۳b \geq ۲\sqrt{۳ab}$ ۰/۲۵ $\Leftrightarrow a+۳b-۲\sqrt{۳ab} \Leftrightarrow$ ۰/۲۵ $(\sqrt{a}-\sqrt{۳b})^{۲} \geq ۰$ ۰/۵ گزاره همیشه درست	۱
۵	الف) اگر $x = \sqrt{۲}-۳$ ۰/۲۵ آنگاه $x^{۲}+۶x+۵ = (x+۳)^{۲}-۴ = (\sqrt{۲}-۳+۳)^{۲}-۴ = ۰ \in \mathbb{Q}$ ۰/۲۵  ۰/۲۵ ب) در گراف مقابل عدد احاطه گری ٤ است در صورتی که $\left\lceil \frac{n}{k+۱} \right\rceil = \left\lceil \frac{۸}{۳} \right\rceil = ۳ \neq ۴$ ۰/۲۵	۱
٦	$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid a+c-c-b \Rightarrow m \mid (a+c)-(b+c) \Rightarrow a+c \overset{m}{\equiv} b+c$ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵	۱
۷	$k \in \mathbb{Z}$ و $y = ۲۳-۳k$ ۰/۲۵ $\Rightarrow x \overset{۵}{\equiv} ۲ \Rightarrow x = ۵k+۲$ ۰/۲۵ $\Rightarrow ۶x \overset{۵}{\equiv} ۲۴۲ \Rightarrow ۳x \overset{۵}{\equiv} ۱۲۱$ ۰/۲۵	۱
۸	۰/۲۵ $۳^{۱۳۹۹}-۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۲$ ۰/۲۵ $\Rightarrow ۳^{۱۳۹۹}-۵ \overset{۱۰}{\equiv} -۸$ ۰/۲۵ $\Rightarrow ۳^{۱۳۹۹}-۳ \overset{۱۰}{\equiv} -۸$ ۰/۲۵ $\Rightarrow (۳^{۲})^{۶۹۹} \overset{۱۰}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۳^{۲} \overset{۱۰}{\equiv} -۱$ ۰/۲۵ پس رقم یکان ۲ می باشد. ۰/۲۵	۱/۵
۹	الف) ۰/۵  ب) ۰/۵  ج) ۰/۵ 	۱/۵
۱۰	الف) $\deg(c) = ۳$ ۰/۲۵ $\delta(G) = ۱$ ۰/۲۵ $\Delta(G) = ۴$ ۰/۲۵ ب) $abeda$ ۰/۲۵ ج) $q = ۲۰ \Rightarrow ۲q = ۵ \times ۸ \Rightarrow pr = ۲q$ ۰/۲۵ ۰/۲۵ پس ۱۱=۹-۲۰ یال بایستی اضافه شود. د) $x = e$ ۰/۲۵	۲
۱۱	الف) $\left\lceil \frac{۱۱}{۵+۱} \right\rceil = ۲$ ۰/۵ ب) $\{i,h,a,g,c,e\}$ ۰/۵ ج) $\{j,k\}$ بله یکتاست. ۰/۵	۱/۵
۱۲	الف) $۷! \times ۵!$ ۰/۵ ب) $۶! \times ۵!$ ۰/۵	۱
۱۳	۰/۲۵ $\frac{۱۰!}{۶! \times ۳!} = ۸۴۰$ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵	۱
۱٤	$x_۱ > ۱ \Rightarrow x_۱ \geq ۲ \Rightarrow x_۱ - ۲ \geq ۰ \Rightarrow y_۱ = x_۱ - ۲ \Rightarrow x_۱ = y_۱ + ۲$	۲

www.kanoon.ir

ردیف	راهنمای آزمون ۰/۵	نمره
	$x_۲ \geq ۳ \Rightarrow \begin{cases} x_۲ = ۳ \Rightarrow y_۱ + ۲ + ۱۲ + x_۳ + x_۴ = ۲۱ \Rightarrow y_۱ + x_۳ + x_۴ = ۷ \Rightarrow \binom{۷+۳-۱}{۳-۱} = ۳۶ & ۰/۵ \\ x_۲ = ۴ \Rightarrow y_۱ + ۲ + ۱۶ + x_۳ + x_۴ = ۲۱ \Rightarrow y_۱ + x_۳ + x_۴ = ۳ \Rightarrow \binom{۳+۳-۱}{۳-۱} = ۱۰ & ۰/۵ \end{cases}$ **تعداد جواب ها=۴۶=۳۶+۱۰** ۰/۵	
۱۵	**الف) بله متعامدند. زیرا برای دو عدد مثل هم از A ، درآیه های نظیر از B مساوی نیستند.** ۰/۲۵ ۰/۵ **ب) طبق مثال صفحه ٦٤ کتاب هر جایگشت از B یک مربع لاتین متعامد با A می سازد پس مثلا جایگشت زیر را اعمال می کنیم تا مربع لاتین C ساخته شود.** ۰/۵ $۱ \to ٤ \qquad ۲ \to ۳ \qquad ٤ \to ۳ \qquad ۱ \to ۲$ $C = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ٤ & ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۲ & ۳ & ٤ & ۱ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ & ٤ \\ \hline ۱ & ٤ & ۳ & ۲ \\ \hline \end{array}$ ۰/۷۵	۲
موفقیت شما آرزوی ماست		۲۰