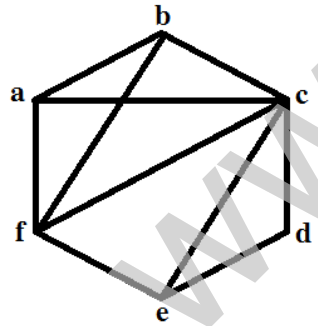
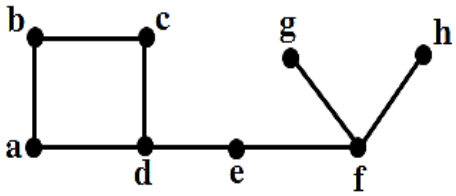
بسمه تعالی

پایه: **دوازدهم دوره دوم متوسطه**	رشته: **ریاضی- فیزیک**	تعداد صفحه: **۲**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
سؤالات امتحان شبه نهایی درس: **ریاضیات گسسته**		تاریخ امتحان: **۱۶ / ۰۲/ ۱۴۰۲**	
نام و نام خانوادگی:		ساعت شروع :	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر $a,b \in \mathbb{R}$ آن‌گاه $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$. ب) اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و $c \neq 0$ آن‌گاه $a \overset{m}{\equiv} b$. ج) تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است. د) در هر گراف، هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است.	۱
۲	جمله‌های زیر را با عدد، کلمه یا عبارت مناسب کامل کنید. الف) شرط لازم و کافی برای آنکه معادلهٔ سیالهٔ $ax + by = c$ داری جواب باشد آن است که، ..... ب) گراف G را همبند گوییم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک ..... وجود داشته‌باشد. ج) عدد احاطه‌گری گراف P_n برابر ..... است. د) اگر $d > 1$ و $d = (a, a+3)$ در این صورت d برابر است با	۱
۳	به روش بازگشتی (گزاره‌های هم ارز) ثابت کنید، میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.	۱
۴	اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد a و b بر ۲۷ به ترتیب ۱۲ و ۱۳ باشد، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(2a - 3b)$ بر ۲۷ را به‌دست‌آورید.	۱/۵
۵	اگر n عددی صحیح باشد، ثابت کنید $3 \mid n^3 - n$.	۱/۷۵
۶	باقی‌ماندهٔ تقسیم $A = 49^{101} + 81$ را بر ۱۶ بیابید.	۱
۷	معادلهٔ همنهشتی $7x \overset{4}{\equiv} 5$ را حل کنید.	۰/۷۵
۸	نمودار گراف G به صورت مقابل است. به سؤال‌های زیر پاسخ دهید. الف) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید. ب) یک مسیر به طول ۴ از a به b بنویسید. ج) درجهٔ رأس e را در گراف $\overline{G}$ را مشخص کنید د) یک دور به طول ۵ در G بنویسید. 	۱/۲۵
۹	عدد احاطه‌گری گراف مقابل را با ارائهٔ راه‌حل، مشخص کنید. 	۱
۱۰	الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد. ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازهٔ ۲ داشته باشد.	۱
۱۱	فرض کنید G یک گراف باشد و $\delta(G) \geq 4$. نشان‌دهید G شامل یک مسیر به طول بزرگ‌تر یا مساوی ۴ است.	۱/۲۵
ادامهٔ سؤالات در صفحهٔ دوم		

www-kanoon-ir

بسمه تعالی

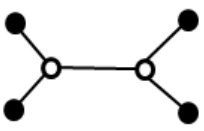
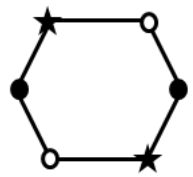
پایه: **دوازدهم دوره دوم متوسطه**	رشته: **ریاضی- فیزیک**	تعداد صفحه: **۲**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
سؤالات امتحان شبه نهایی درس: **ریاضیات گسسته**		تاریخ امتحان: **۱۶ / ۰۲/ ۱۴۰۲**	
نام و نام خانوادگی:		ساعت شروع :	

۱۲	معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$ چه تعداد جواب صحیح و نامنفی دارد، به شرط آنکه $1 \le i \le 5 , x_i \ge 1$.	۱
۱۳	به چند طریق می‌توان ۱۲ نفر را به سه گروه متفاوت با تعداد اعضای ۳، ۴ و ۵ نفر تقسیم نمود.	۰/۵
۱۴	۵ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۴ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم در یک ردیف قرار بگیرند، اگر بخواهیم: الف) همواره دانش‌آموزان هر پایه کنار هم باشند. ب) به صورت یک در میان قرار بگیرند. ج) یک دانش آموز خاص یازدهم و یک دانش آموز خاص دوازدهم در کنار هم باشند.	۱/۵
۱۵	الف) دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۳ بنویسید. ب) یک مربع لاتین چرخشی از مرتبهٔ 4×4 بنویسید.	۱/۵
۱۶	در یک مدرسهٔ ۱۰۰ نفره، ۵۵ نفر فوتبال و ۶۵ نفر والیبال بازی می‌کنند. اگر ۵ نفر در هیچ رشتهٔ ورزشی نباشند. چند نفر فقط در یک رشته به فعالیت می‌پردازند؟	۱/۵
۱۷	اعداد $A = \{1, 2, \dots, 84\}$ را در نظر می گیریم. نشان دهید هر زیر مجموعهٔ ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموع‌شان برابر با ۸۵ است.	۱/۵
	تلاش جادویی است که موفقیت را می سازد.	۲۰

www-kanoon.ir

بسمه تعالی

پایه: **دوازدهم دوره دوم متوسطه**	رشته: **ریاضی- فیزیک**	تعداد صفحه: **۲**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
سؤالات امتحان شبه نهایی درس: **ریاضیات گسسته**		تاریخ امتحان: **۱۶ / ۰۲/ ۱۴۰۲**	
نام و نام خانوادگی:		ساعت شروع :	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	الف) درست [۰/۲۵] ب) نادرست [۰/۲۵] ج) درست [۰/۲۵] د) نادرست [۰/۲۵]	۱
۲	الف) $(a,b)\|c$ [۰/۲۵] ب) مسیر [۰/۲۵] ج) $\left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$ [۰/۲۵] د) $d = ۳$ [۰/۲۵]	۱
۳	$\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$ [۰/۲۵] $\Leftrightarrow a+b \geq ۲\sqrt{ab}$ [۰/۲۵] $\Leftrightarrow a+b-۲\sqrt{ab} \geq ۰$ [۰/۲۵] $\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^{۲}$ گزاره همیشه درست [۰/۲۵] ≥ ۰	۱
۴	$\begin{cases} a = ۲۷q_۱ + ۱۲ \Rightarrow ۲a = ۵۴q_۱ + ۲۴ & [۰/۲۵] \\ b = ۲۷q_۲ + ۱۳ \Rightarrow -۳b = -۸۱q_۲ - ۳۹ & [۰/۲۵] \end{cases} \Rightarrow ۲a - ۳b = ۵۴q_۱ + ۲۴ - ۸۱q_۲ - ۳۹$ $= ۲۷(۲q_۱ - ۳q_۲) - ۱۵$ [۰/۵] $= ۲۷q_۳ - ۲۷ + ۱۲$ [۰/۲۵] $= ۲۷(q_۳ - ۱) + ۱۲ \Rightarrow r = ۱۲$ [۰/۲۵]	۱/۵
۵	توجه می‌کنیم که (*) $n^۳ - n = n(n^۲ - ۱) = n(n+۱)(n-۱)$ [۰/۵] n به یکی از سه شکل $۳k$، $۳k+۱$ و $۳k+۲$ است. [۰/۲۵] اگر $n = ۳k$، آن‌گاه با توجه به (*)، $n^۳ - n$ مضرب ۳ است. [۰/۲۵] اگر $n = ۳k+۱$، آن‌گاه $n-۱ = ۳k$ و در نتیجه با توجه به (*)، $n^۳ - n$ مضرب ۳ است. [۰/۲۵] اگر $n = ۳k+۲$، آن‌گاه $n+۱ = ۳k+۳ = ۳(k+۱) = ۳k'$ و در نتیجه با توجه به (*)، $n^۳ - n$ مضرب ۳ است. [۰/۵]	۱/۷۵
۶	$۴۹ \overset{۱۶}{\equiv} ۱$ [۰/۲۵] $\Rightarrow ۴۹^{۱۰۱} \overset{۱۶}{\equiv} ۱^{۱۰۱} = ۱$ [۰/۲۵] $\Rightarrow ۴۹^{۱۰۱} + ۸۱ \overset{۱۶}{\equiv} ۸۲ \overset{۱۶}{\equiv} ۲$ [۰/۲۵] $\Rightarrow A \overset{۱۶}{\equiv} ۲$ [۰/۲۵]	۱
۷	$۷x \overset{۴}{\equiv} ۵ \Rightarrow ۷x \overset{۴}{\equiv} ۵ + ۱۶ = ۲۱$ [۰/۲۵] $\Rightarrow x \overset{۴}{\equiv} ۳$ [۰/۲۵] $\Rightarrow x = ۴k+۳$ [۰/۲۵]	۰/۷۵
۸	الف) $\delta(G) = ۲$ [۰/۲۵]، $\Delta(G) = ۵$ [۰/۲۵] ب) $afecb$ [۰/۲۵] ج) $d_{\bar{G}}(e) = ۲$ [۰/۲۵] د) $abcefa$ [۰/۲۵]	۱/۲۵
۹	برای احاطه کردن رأس h، یکی از رئوس h یا f باید در مجموعهٔ احاطه‌گر باشد. [۰/۲۵] برای احاطه کردن رئوس a,b,c,d حداقل ۲ رأس غیر از h یا f مورد نیاز است. [۰/۲۵] بنابراین $\gamma(G) \geq ۳$. [۰/۲۵] چون $\{f,d,b\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای گراف است، پس $\gamma(G) = ۳$. [۰/۲۵]	۱
۱۰	الف) مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با دایرهٔ توخالی مشخص شده است. [۰/۵]  ب) رأس‌های هم‌شکل، یک مجموعهٔ احاطه‌گر را نشان‌می‌دهند. [۰/۵] 	۱

www-kanoon-ir

بسمه تعالی

پایه: **دوازدهم دوره دوم متوسطه**	رشته: **ریاضی- فیزیک**	تعداد صفحه: **۲**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
سؤالات امتحان شبه نهایی درس: **ریاضیات گسسته**		تاریخ امتحان: **۱۶ / ۰۲/ ۱۴۰۲**	
نام و نام خانوادگی:		ساعت شروع :	

۱۱	فرض کنیم a یک رأس دلخواه در G باشد. به طور حتم a به رأس دیگری مثل b متصل است، چون $\delta(G) \geq ۴$. [۰/۲۵] چون $\delta(G) \geq ۴$، به طور حتم b به رأس دیگری غیر از a، مثل c متصل است. [۰/۲۵] چون $\delta(G) \geq ۴$، به طور حتم c به رأس دیگری غیر از a و b، مثل d متصل است. [۰/۲۵] چون $\delta(G) \geq ۴$، به طور حتم d به رأس دیگری غیر از a و b و c، مثل e متصل است. [۰/۲۵] بنابراین $abcde$ یک مسیر با طول ۴ در گراف G است. [۰/۲۵]	۱/۲۵
۱۲	$x_i \geq ۱ \Longrightarrow y_i := x_i - ۱ \geq ۰$ [۰/۲۵] $\Longrightarrow x_i = y_i + ۱ \Longrightarrow (y_۱ + ۱) + \cdots + (y_۵ + ۱) = ۱۱$ $\Longrightarrow y_۱ + \cdots + y_۵ = ۶$ [۰/۲۵] $\xrightarrow{\binom{n+k-۱}{k-۱}\ [۰/۲۵]}$ تعداد جواب‌های معادله $= \binom{۶+۵-۱}{۵-۱}$ $= \binom{۱۰}{۴}$ [۰/۲۵]	۱
۱۳	$\frac{۱۲}{۳! \times ۴! \times ۵!}$ [۰/۵]	۰/۵
۱۴	الف) $۲! \times ۵! \times ۴!$ [۰/۵] ب) $۵! \times ۴! = ۵ \times ۴ \times ۴ \times ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۱ \times ۱ \times ۱ =$ تعداد حالات $\Longrightarrow$ ۵ ۴ ۴ ۳ ۳ ۲ ۲ ۱ ۱ ۱ [۰/۵] ج) $۲! \times ۸!$ [۰/۵]	۱/۵
۱۵	الف) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{pmatrix}$ [۰/۵] $\Longrightarrow \begin{pmatrix} ۱۱ & ۲۲ & ۳۳ \\ ۲۳ & ۳۱ & ۱۲ \\ ۳۲ & ۱۳ & ۲۱ \end{pmatrix}$ [۰/۵] ب) [۰/۵] $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \end{pmatrix}$	۱/۵
۱۶	فرض کنیم S مجموعهٔ دانش آموزان مدرسه، F دانش‌آموزانی که فوتبال بازی می‌کنند و V دانش‌آموزانی که والیبال بازی می‌کنند. بنابراین $|S| = ۱۰۰, |F| = ۵۵, |V| = ۶۵, |\overline{F} \cap \overline{V}| = ۵$. [۰/۲۵] $|F \cup V| = |S| - |\overline{F} \cap \overline{V}| = ۱۰۰ - ۵ = ۹۵$ [۰/۲۵] $|F \cap V| = |F| + |V| - |F \cup V| = ۵۵ + ۶۵ - ۹۵ = ۲۵$ [۰/۲۵] تعداد افرادی فقط فوتبال بازی می‌کنند $= |F| - |F \cap V| = ۵۵ - ۲۵ = ۳۰$ [۰/۲۵] تعداد افرادی فقط والیبال بازی می‌کنند $= |V| - |F \cap V| = ۶۵ - ۲۵ = ۴۰$ [۰/۲۵] تعداد افرادی فقط در یک رشته بازی می‌کنند $= ۴۰ + ۳۰ = ۷۰$ [۰/۲۵]	۱/۵
۱۷	فرض کنیم B یک زیرمجموعهٔ ۴۳ عضوی از A باشد. [۰/۲۵] می‌خواهیم این ۴۳ عضو را در ۴۲ مجموعهٔ $A_۱$، $A_۲$، ... ، $A_{۴۲}$ بگنجانیم مشروط بر این که $A_i \subseteq \{i, ۸۵ - i\}$. [۰/۷۵] اگر عناصر مجموعهٔ A را کبوترها و A_iها را لانه‌ها فرض کنیم. چون تعداد کبوترها از تعداد لانه‌ها بیشتر است، بنابر اصل لانه کبوتری حداقل یکی از A_iها حداکثر تعداد اعضای خود را خواهدداشت و این یعنی حداقل دو عضو مجموعهٔ S، مجموع‌شان برابر ۸۵ است. [۰/۵]	۱/۵