پاسخ نمونه سؤالات نهایی دروس ریاضی پایهٔ دوازدهم و یازدهم (ریاضی- تجربی- انسانی)
ریاضیات گسسته (پایهٔ دوازدهم رشتهٔ ریاضی)

۱ الف) نادرست است، زیرا اگر $n=۴$ در این صورت $n^۲=۱۶$ مضرب ۸ است ولی $n=۴$ مضرب ۸ نیست.

ب) نادرست است، زیرا $\sqrt{۲}\in Q'$ و $۰\in Q$ ولی $۰\times\sqrt{۲}=۰\notin Q'$

پ) نادرست است، زیرا اگر $a=۹$ و $b=۶$ در این صورت $\frac{a}{b}=\frac{۳۶}{۹}$ ولی $\frac{۹}{۶}$

ت) درست است.

۲ طبق فرض مسأله داریم:

$$(۱)\ a=۵q_۱+۱ \quad (۲)\ q=۷q_۲+۴ \Rightarrow$$

حال به دنبال دو عدد صحیح و متوالی هستیم که مضرب ۳۵ در طرف دو متساوی‌ها ایجاد کرده که دو عدد ۱۴ و ۱۵ این ویژگی را دارند پس تساوی (۱) را در ۱۴ و تساوی (۲) را در ۱۵ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases}۱۴a=۱۴\times۵q_۱+۱۴\\ ۱۵a=۱۵\times۷q_۲+۶۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۱۴a=۲\times۳۵q_۱+۱۴\\ ۱۵a=۳\times۳۵q_۲+۶۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow(۱۵a-۱۴a)=۳۵(\overbrace{۳q_۲-۲q_۱}^{q'})+(۶۰-۱۴)$$

$$\Rightarrow a=۳۵q'+۴۶=۳۵q'+۳۵+۱۱=۳۵(\overbrace{q'+۱}^{q})+۱۱$$

$$\Rightarrow a=۳۵q+۱۱\Rightarrow \boxed{r=۱۱}$$

۳ طبق فرض:

$$(۱)\quad ۷\mid ۳k-۱ \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} ۴۹\mid ۹k^۲-۶k+۱$$

$$(۲)\quad ۷\mid ۳k-۱ \xrightarrow{\times۷\text{طرفین}} ۴۹\mid ۲۱k-۷$$

$$(۱)\quad ۴۹\mid ۲۱k-۷ \xrightarrow{\times K^۲\text{سمت راست}} ۴۹\mid ۲۱k^۳-۷k^۲$$

$$(۱),(۲),(۳)\xrightarrow{+} ۴۹\mid ۲۱k^۳+۲k^۲+۱۵k-۶$$

۴ می‌دانیم اگر $a\overset{n}{\equiv}b$ و $a\overset{m}{\equiv}b$ آنگاه $(m,n)=۱$ و $a\overset{mn}{\equiv}b$

$$۳\overset{۳}{\equiv}۰\to ۳^{۱۳۰}\overset{۳}{\equiv}۰ \qquad (۱)$$

$$۳^۳=۲۷\overset{۷}{\equiv}۶\overset{۷}{\equiv}-۱\to ۳^{۳}\overset{۷}{\equiv}-۱\to (۳^۳)^{۴۳}\overset{۷}{\equiv}(-۱)^{۴۳}$$

$$\to ۳^{۱۲۹}\times ۳^۱\overset{۷}{\equiv}(-۱)\times ۳\to ۳^{۱۳۰}\overset{۷}{\equiv}-۳ \qquad (۲)$$

$$۲\overset{۳}{\equiv}-۱\to ۲^{۱۳۰}\overset{۳}{\equiv}۱ \qquad (۳)$$

$$(۱),(۳)\to ۳^{۱۳۰}-۲^{۱۳۰}\overset{۳}{\equiv}۰-۱=-۱\overset{۳}{\equiv}۲\to ۳^{۱۳۰}-۲^{۱۳۰}\overset{۳}{\equiv}۲ \quad (۴)$$

$$۳^۶=۶۴\overset{۷}{\equiv}۱\to ۲^{۱۲۶}\overset{۷}{\equiv}۲^{۲۱}\overset{۷}{\equiv}۱\to ۲^{۱۲۶}\times ۲^۴\overset{۷}{\equiv}۱۶$$

$$\to ۲^{۱۳۰}\overset{۷}{\equiv}۱۶\overset{۷}{\equiv}۲\to ۲^{۱۳۰}\overset{۷}{\equiv}۲ \qquad (۵)$$

$$(۲),(۵)\to ۳^{۱۳۰}-۲^{۱۳۰}\overset{۷}{\equiv}-۳-۲=-۵,-۵\overset{۷}{\equiv}۲$$

$$\to ۳^{۱۳۰}-۲^{۱۳۰}\overset{۷}{\equiv}۲ \qquad (۶)$$

$$(۶),(۴)\to ۳^{۱۳۰}-۲^{۱۳۰}\overset{۷\times۳}{\equiv}۲\to (۳^{۱۳۰}-۲^{۱۳۰})\overset{۲۱}{\equiv}۲$$

$$\to (۳^{۱۳۰}-۲^{۱۳۰})+۲۵\overset{۲۱}{\equiv}۲+۲۵=۲۷\overset{۲۱}{\equiv}۶$$

$$\to (۳^{۱۳۰}-۲^{۱۳۰})+۲۵\overset{۲۱}{\equiv}۶\to r=۶$$

۵ طبق فرض باقیماندهٔ تقسیم b بر ۱۱۹ مساوی با ۲۵ است پس $b\overset{۱۱۹}{\equiv}۲۵$ و طبق فرض $a\overset{۵۱}{\equiv}b$ لذا داریم:

$$\begin{cases}a\overset{۵۱}{\equiv}b\\ a\overset{۱۱۹}{\equiv}۲۵\end{cases}\to a\overset{(۱۱۹,۵۱)}{\equiv}۲۵\to a\overset{۱۷}{\equiv}۲۵$$

$$\to a+۹\overset{۱۷}{\equiv}۲۵+۹=۳۴\overset{۱۷}{\equiv}۰$$

پس باقیماندهٔ $(a+۹)$ بر ۱۷ صفر است.

۶ معادل این جمله که «باقیماندهٔ تقسیم هفت برابر x بر ۱۱، مساوی با ۸ است» به‌صورت $۷x\overset{۱۱}{\equiv}۸$ نوشته می‌شود پس در واقع باید x هایی را بیابیم با فرض $۹\le x<۵۰$ که در معادلهٔ هم‌نهشتی بالا صدق کنند: (توجه داریم که به هر طرف یک هم‌نهشتی می‌توان هر مضربی از پیمانه را اضافه یا کم کرد.)

$$۷x\overset{۱۱}{\equiv}۸\to ۷x\overset{۱۱}{\equiv}۸+۵۵\to ۷x\overset{۱۱}{\equiv}۶۳\to ۷x\overset{۱۱}{\equiv}۷\times۹$$

$$\xrightarrow{(۷,۱۱)=۱} x\overset{۱۱}{\equiv}۹\to x=۱۱K+۹$$

$$K=۰\to x=۹$$

$$K=۱\to x=۲۰$$

$$K=۲\to x=۳۱$$

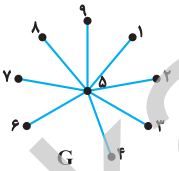
$$K=۳\to x=۴۲$$

۷ $$v=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$$

$$E=\{\{x,y\}\mid xy=۵k,k\in\mathbb{Z}\}$$

$$E=\{\{۱,۵\},\{۲,۵\},\{۳,۵\},\{۴,۵\},\{۶,۵\},\{۷,۵\},\{۸,۵\},\{۹,۵\}\}$$

$$\Delta=۸,\delta=۱\to\Delta-\delta=۷$$



۸ اگر اندازه را با q و مرتبهٔ G را با p نمایش دهیم، طبق فرض داریم:

$$q=۶p-۲۰\ \text{گرافی}-۴\ \text{منتظم است و}\ G\to ۴p=۲q$$

$$\begin{cases}q=۶p-۲۰\\ \frac{۴p=۲q}{۲p=q}\end{cases}\to\begin{cases}q=۶p-۲۰\\ q=۲p\end{cases}\to ۶p-۲۰=۲p$$

$$\to ۴p=۲۰$$

$$\to p=۵,q=۲p=۱۰$$

$$\to p+q=۵+۱۰=۱۵$$

۹ چون گراف G فقط رأس‌های درجهٔ ۲ و ۵ دارد پس $\delta=۲$ و $\Delta=۵$ از طرفی برای این که بیش‌ترین مقدار برای q را به‌دست آوریم باید درجهٔ رأس‌ها تا حد ممکن بیش‌ترین مقدار باشد یعنی باید حتی‌الامکان درجهٔ رأس‌ها را از درجهٔ ۵ فرض کنیم. (اگر ۷ رأس را از درجهٔ ۵ و ۱ رأس را از درجهٔ ۲ فرض کنیم در این صورت تعداد رأس‌های درجهٔ فرد، فرد است و این امکان ندارد.)

یعنی باید ۶ رأس از درجهٔ ۵ و ۲ رأس از درجهٔ ۲ داشته باشیم تا q بیش‌ترین مقدار را داشته باشد.

$$\to q_{max}=\frac{(۶\times۵)+(۲\times۲)}{۲}=\frac{۳۴}{۲}=۱۷$$

۱۰

$$N_G(c)=\{d,b\}\to|N_G(c)|=۲$$

$$N_G[f]=\{f,e,d\}\to|N_G[f]|=۳$$

$$N_G(b)=\{a,c,d\}\to|N_G(b)|=۳$$

$$N_G[d]=\{d,b,c,f,e\}\to|N_G[d]|=۵$$

$$\to\frac{|N_G(c)|}{|N_G[f]|}\times\frac{|N_G(b)|}{|N_G[d]|}=\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۲}{۵}$$

۱۱ می‌دانیم مجموعهٔ احاطه‌گری می‌نیمال است که با حذف هر عضو از آن مجموعه، احاطه‌گری از بین برود و آن مجموعه دیگر احاطه‌گر نباشد و می‌دانیم $\gamma=۳$ پس:

الف) $D_۱=\{a,h,e\}\to$ این مجموعه احاطه‌گر است ولی می‌نیمم است.

ب) $D_۲=\{a,i,c,g,e\}\to$ این مجموعه احاطه‌گر بوده و می‌نیمال است زیرا هر عضو آن را حذف کنیم دیگر احاطه‌گر نمی‌باشد.

پ) $D_۳=\{b,c,h,e\}\to$ احاطه‌گر نیست

ت) $D_۴=\{a,j,d,g\}\to$ این مجموعه نیز احاطه‌گر و می‌نیمال است ولی چون ۴ عضوی است می‌نیمم نمی‌باشد.

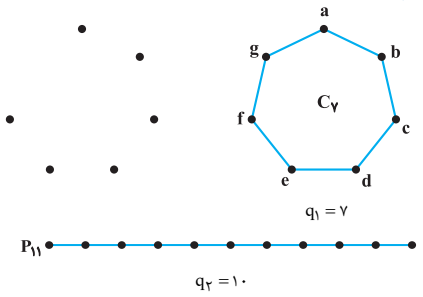
۱۲ الف) عددی حسابی است (تعداد رأس‌های زوج در هر گراف عددی حسابی است.)

ب) ۱۵ (تعداد یال‌های گراف $K_۷$ از تعداد یال‌های گراف $K_۹$، ۱۵ یال کم‌تر است.)

پ) هم‌بند- مسیر

گراف G را هم‌بند می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن، حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.)

۱۳



$q_۲-q_۱=۱۰-۷=۳$

$۳=$ عدد احاطه‌گری $\to C_۷-\gamma=\{a,d,f\}$ مجموعه برای

(هیچ مجموعهٔ دو عضوی از رأس‌های $C_۷$ نمی‌تواند احاطه‌گر باشد.)

۱۴ ۴ مداد متمایز داریم و ۴ خودکار که متمایزند.

الف) ۴ خودکار را یک شیء فرض کرده که با ۴ مداد روی هم ۵ شیء شده که تعداد ۵! جایگشت داشته و در هر حالت ۴ خودکار در عین حال که کنار هم هستند ۴! جایگشت دارند پس جواب (الف) برابر است با $۵!\times۴!$

ب) چون تعداد دو گروه شیء با هم برابر است برای یک در میان قرار گرفتن هم می‌توان با مداد شروع کرد و هم با خودکار یعنی:



$\to ۲\times۴!$



$\to ۲\times۴!\times۴!$

جواب $\to ۲\times۴!\times۴!+۲\times۴!$

۱۵ می‌دانیم همواره «تعداد جایگشت‌های n تایی از n شیء با تعداد جایگشت‌های $(n-۱)$ تایی از همان n شیء برابر است» پس تعداد ۵ رقمی‌ها از این ۶ رقم با ۶ رقمی‌ها از همین ۶ رقم برابر است.

$$\text{تعداد ۵ رقمی‌ها}=\text{تعداد ۶ رقمی‌ها}=\frac{۶!}{۲!\times۲!}=\frac{۷۲۰}{۴}=۱۸۰$$

www.kanoon.ir

برای محاسبهٔ ۴ رقمی‌ها که با این ارقام ۱،۱،۲،۲،۳،۴ می‌توان نوشت باید تعداد حالت‌های زیر را جدا جدا محاسبه و با هم جمع کنیم:

$$\frac{4!}{2!\times 2!}=6 \rightarrow \text{چهار رقمی‌های شامل } 1,1,2,2$$

$$\frac{4!}{2!}=12 \rightarrow \text{چهار رقمی‌های شامل } 1,1,2,3$$

$$\frac{4!}{2!}=12 \rightarrow \text{چهار رقمی‌های شامل } 1,1,2,4$$

$$\frac{4!}{2!}=12 \rightarrow \text{چهار رقمی‌های شامل } 1,1,3,4$$

$$\frac{4!}{2!}=12 \rightarrow \text{چهار رقمی‌های شامل } 2,2,3,1$$

$$\frac{4!}{2!}=12 \rightarrow \text{چهار رقمی‌های شامل } 2,2,4,1$$

$$\frac{4!}{2!}=12 \rightarrow \text{چهار رقمی‌های شامل } 2,2,3,4$$

$$4!=24 \rightarrow \text{چهار رقمی‌های شامل } 1,2,3,4$$

$$6\times(12)+6+24=102 \rightarrow \text{تعداد کل چهار رقمی‌ها}$$

۱۶ | اگر فرض کنیم $x_i\ (1\le i\le 4)$ تعداد انتخاب‌ها از غذای نوع i ام باشد در این صورت تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=7$ جواب مسأله می‌باشد.

$$\binom{10}{3}=\frac{10!}{3!\times 7!} \rightarrow \text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}$$

$$=\frac{10\times 9\times 8\times \cancel{7!}}{3!\times \cancel{7!}}=120$$

۱۷ | برای یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+\sqrt{x_2}+x_3+x_4=4$ برای x_2 مقادیر ۱۶،۹،۴،۱،۰ که همگی مربع کامل هستند را در نظر گرفته و در هر حالت جواب‌های صحیح و نامنفی را به‌دست آورده و همه را با هم جمع می‌کنیم.

$$x_2=0\rightarrow x_1+0+x_3+x_4=4$$

$$\rightarrow \text{تعداد جواب‌ها}=\binom{6}{2}=15$$

$$x_2=1\rightarrow x_1+\sqrt{1}+x_3+x_4=4\rightarrow x_1+x_3+x_4=3$$

$$\rightarrow \text{تعداد جواب‌ها}=\binom{5}{2}=10$$

$$x_2=4\rightarrow x_1+\sqrt{4}+x_3+x_4=4\rightarrow x_1+x_3+x_4=2$$

$$\rightarrow \text{تعداد جواب‌ها}=\binom{4}{2}=6$$

$$x_2=9\rightarrow x_1+\sqrt{9}+x_3+x_4=4\rightarrow x_1+x_3+x_4=1$$

$$\rightarrow \text{تعداد جواب‌ها}=\binom{3}{2}=3$$

$$x_2=16\rightarrow x_1+\sqrt{16}+x_3+x_4=4\rightarrow x_1+x_3+x_4=0$$

$$\rightarrow \text{تعداد جواب‌ها}=\binom{2}{2}=1$$

$$\text{تعداد کل جواب‌ها}=15+10+6+3+1=35$$

۱۸ |

الف)

$$A=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2&1&4&3\\\hline 3&4&1&2\\\hline 1&2&3&4\\\hline 4&3&2&1\\\hline\end{array}\xrightarrow[1\rightarrow 3,4\rightarrow 1]{3\rightarrow 4,2\rightarrow 2}B=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2&3&1&4\\\hline 4&1&3&2\\\hline 3&2&4&1\\\hline 1&4&2&3\\\hline\end{array}$$

ب) اگر این دو مربع لاتین را روی هم قرار دهیم خواهیم داشت:

۲۲	۱۳	۴۱	۳۴
۳۴	۴۱	۱۳	۲۲
۱۳	۲۲	۳۴	۴۱
۴۱	۳۴	۲۲	۱۳

چون اعداد دورقمی و تکراری در خانه‌های این مربع جدید مشاهده می‌شود پس A و B متعامد نیستند.

۱۹ |

$$K+1=9\rightarrow K=8$$

$$n=12\times 7=84$$

$$Kn+1=8\times(84)+1=673$$

(طبق تعمیم اصل لانه کبوتری، هرگاه $(Kn+1)$ کبوتر در n لانه قرار بگیرند، حداقل ۱ لانه هست که در آن حداقل $(K+1)$ کبوتر قرار خواهد داشت.)

۲۰ | مجموعه‌های A ، B و C را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A=\{1\le n\le 200 \mid 4\mid n\}$$

$$B=\{1\le n\le 200 \mid 6\mid n\}$$

$$C=\{1\le n\le 200 \mid 5\mid n\}$$

واضح است که تعداد اعضای مجموعهٔ $(A'\cap B'\cap C')$ موردنظر است.

$$|(A'\cap B'\cap C')|=|(A\cup B\cup C)'|=|S|-|A\cup B\cup C|$$

$$|S|=200,|A|=\frac{200}{4}=50,|B|=\left[\frac{200}{6}\right]=33,|C|=\frac{200}{5}=40$$

$$|A\cap B|=\left[\frac{200}{[4,6]}\right]=\left[\frac{200}{12}\right]=16,|A\cap C|=\left[\frac{200}{[4,5]}\right]$$

$$=\left[\frac{200}{20}\right]=10$$

$$|B\cap C|=\left[\frac{200}{[6,5]}\right]=\left[\frac{200}{30}\right]=6,|A\cap B\cap C|=\left[\frac{200}{[4,6,5]}\right]$$

$$=\left[\frac{200}{60}\right]=3$$

$$|S|-|A\cup B\cup C|=200-(50+33+40-16-10$$

$$-6+3)=94$$

$$(|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|$$

$$-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|)$$

www-kanoon-ir

نمونه سؤالات نهایی دروس ریاضی پایهٔ دوازدهم و یازدهم (ریاضی- تجربی- انسانی)

ریاضیات گسسته (پایهٔ دوازدهم رشتهٔ ریاضی)

حمیدرضا امیری

۱| کدام گزاره درست و کدام گزاره نادرست است؟ نادرستی گزاره‌های نادرست را با مثال نقض نشان دهید.

الف) اگر $n^۲$ مضرب ۸ باشد آنگاه n مضرب ۸ است.

ب) حاصل‌ضرب هر عدد گویا در هر عدد گنگ عددی گنگ است.

پ) اگر $a \mid b^۲$ آنگاه $a \mid b$.

ت) اگر $a^m \mid b^n$ و $m \geq n$ آنگاه $a \mid b$.

۲| اگر باقیماندهٔ تقسیم عدد a بر ۵ و ۷ به‌ترتیب ۱ و ۴ باشد، باقیماندهٔ تقسیم a را بر ۳۵ بیابید.

۳| اگر $۷ \mid ۳k-۱$ و $k \in \mathbb{Z}$، ثابت کنید $۴۹ \mid ۲۱k^۳ + ۲k^۲ + ۱۵k - ۶$.

۴| باقیماندهٔ تقسیم عدد $A = (۳^{۱۳۰} - ۲^{۱۳۰}) + ۲۵$ را بر عدد ۲۱ بیابید.

۵| اگر $a \overset{۵۱}{\equiv} b$ و باقیماندهٔ تقسیم b بر ۱۱۹ مساوی با ۲۵ باشد، در این صورت باقیماندهٔ تقسیم $(a+۹)$ را بر ۱۷ بیابید.

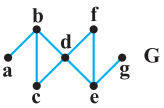
۶| اعداد طبیعی چون x بیابید که ۷ برابر آن‌ها را اگر بر ۱۱ تقسیم کنیم، باقیماندهٔ تقسیم برابر با ۸ می‌شود، با فرض $۹ \leq x < ۵۰$.

۷| گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ و مجموعهٔ یال‌های $E = \{\{x,y\} \mid xy = ۵k, k \in \mathbb{Z}\}$ را رسم کرده و حاصل $(\Delta - \delta)$ را به‌دست آورید.

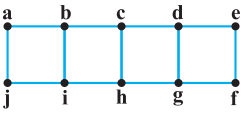
۸| اگر اندازهٔ گراف G از ۶ برابر مرتبهٔ آن ۲۰ واحد کم‌تر باشد و G گرافی ۴- منتظم باشد، مجموع مرتبه و اندازهٔ این گراف را بیابید.

۹| گراف G از مرتبهٔ ۸ فقط رأس‌های از درجهٔ ۲ و ۵ دارد در این گراف بیش‌ترین مقدار برای اندازهٔ (q) را بیابید.

۱۰| با توجه به گراف G حاصل عبارت $\frac{|N_G(c)|}{|N_G[f]|} \times \frac{|N_G(b)|}{|N_G[d]|}$ را بیابید.



۱۱| با توجه به گراف زیر کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، مجموعه‌ای احاطه‌گر و می‌نیمال است اما می‌نیمم نمی‌باشد؟ (با ذکر دلیل)



الف) $D_۱ = \{a,h,e\}$

ب) $D_۲ = \{a,i,c,g,e\}$

پ) $D_۳ = \{b,c,h,e\}$

ت) $D_۴ = \{a,j,d,g\}$

۱۲| جاهای خالی را با عدد یا کلمات مناسب پر کنید.

الف) تعداد رأس‌های زوج در هر گراف ..... .

ب) تعداد یال‌های گراف $K_۷$ از تعداد یال‌های گراف $K_۹$، ..... یال کم‌تر است.

پ) گراف G را ..... می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک ..... وجود داشته باشد.

۱۳| ابتدا اختلاف تعداد یال‌های گراف $P_{۱۱}$ و $C_۷$ را بیابید و سپس یک γ- مجموعه برای گراف $C_۷$ بنویسید و عدد احاطه‌گری آن را مشخص کنید.

۱۴| ۴ مداد متمایز و ۴ خودکار متمایز به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار بگیرند هرگاه بخواهیم:

الف) همواره خودکارها کنار هم باشند.

ب) به‌صورت یک در میان قرار بگیرند.

۱۵| با ارقام ۱,۱,۲,۲,۳,۴ چند عدد پنج رقمی و چند عدد چهار رقمی می‌توان نوشت؟

۱۶| ۷ نفر به چند طریق می‌توانند در یک رستوران که فقط ۴ نوع غذا دارد، سفارش غذا بدهند به شرط آن که هر نفر فقط یک پرس غذا سفارش بدهد؟

۱۷| معادلهٔ $x_۱ + \sqrt{x_۲} + x_۳ + x_۴ = ۴$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۱۸| الف) مربع لاتین A را درنظر بگیرید. با اعمال جایگشت $۳ \to ۱$ و $۲ \to ۲$ و $۴ \to ۳$ و $۱ \to ۴$ مربع لاتین B را به‌دست آورید.

ب) آیا دو مربع لاتین A و B متعامدند؟ (با ذکر دلیل)

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \\ \hline ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ \hline ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline \end{array}$$

۱۹| در یک دانشکده حداقل چند دانشجو مشغول تحصیل باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۹ نفر از آن‌ها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است؟

۲۰| چه تعداد عدد طبیعی مانند n که $۱ \leq n \leq ۲۰۰$ وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر نباشند و بر ۶ بخش‌پذیر نباشند و بر ۵ نیز بخش‌پذیر نباشند؟