Kanoon.ir

شما با دانلود این نمونه سوال، کد تخفیف خرید کتاب از سایت کانون بوک دریافت می کنید.

برای دریافت کد جایزه خود، عدد 33 را به سر شماره 90008451 ارسال کنید.



تمرین بیشتر نمونه سوالات امتحانی با کتاب های پرتکرار

همین حالا جایزه خود را دریافت کنید.

kanoonBook.ir

www.kanoon.ir

نام و نام خانوادگی : **عنوان آزمون :** فصل ۱هندسه۳علامه۲

پایه تحصیلی : ۱۲ ریاضی **زمان آزمون :**

نام دبیر : **تاریخ برگزاری** ۱۴۰۴/۰۷/۱۵

۱) اگر دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه $\begin{cases} ۳x + ay = ۸ \\ x + by = -۲ \end{cases}$ برابر ۱۴ باشد، آنگاه مقدار y کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۲) برای ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$، اگر $C = A \times B$ و $D = B \times C \times A$ باشد، $|D|$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۳) اگر ماتریس‌های $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$، $C = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $A = B \times C$ باشند، درایه واقع در سطر سوم ستون اول ماتریس $A^۵$ کدام است؟

۱) -۱۶ ۲) -۳۲ ۳) -۸ ۴) -۶۴

۴) کدام‌یک از گزینه‌های زیر مثال نقض دارد؟ (A و B ماتریس‌هایی مربعی از مرتبهٔ ۳ و وارون‌پذیر هستند.)

۱) $|BA - I| = |AB - I|$ ۲) $\left|ABA^{-۱} - ۲\right| = |B - ۲I|$

۳) $|A - B| = |B - A|$ ۴) $\left|(A^{-۱} BA)^{۲}\right| = |B|^{۲}$

۵) معادلهٔ $\begin{vmatrix} ۰ & x & \operatorname{Log} x \\ -x & ۰ & x^{۲} - ۱ \\ -\operatorname{Log} x & ۱ - x^{۲} & ۰ \end{vmatrix} = ۰$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۶) اگر $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ x & y & z \end{bmatrix}$، $|A| = ۱۰$، $\begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} = ۲$ و $\begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} = ۳$ باشد، مقدار $ay - bx$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

www.kanoon.ir

۷) اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ |A| & ۲ & m \\ ۲ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$ و دترمینان ماتریس $(|A|+۱)A^{۳}$ برابر ۸ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۴ ۴) ۶

۸) $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ ماتریس‌های مربعی از مرتبهٔ ۳ و $b_{ij}=۳^{(i+j-۲)a_{ij}}$ است. در صورتی که دترمینان ماتریس B برابر با ۸۱ باشد، دترمینان ماتریس A کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{۱}{۸۱}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

۹) اگر $A^{۲}+A-I=\bar{o}$، آنگاه وارون ماتریس $A^{۳}$ برابر کدام است؟

۱) $۴I-A$ ۲) $۲A-I$ ۳) $۲A+۳I$ ۴) $۳I-۲A$

۱۰) اگر A و B دو ماتریس مربعی و $A^{۲}+AB=\begin{bmatrix} -۶ & -۸ \\ ۹ & ۵ \end{bmatrix}$، $BA+B^{۲}=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۷ & ۰ \end{bmatrix}$ و $A-B=\begin{bmatrix} ۳ & -۳ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) -۳ ۴) ۴

۱۱) اگر $A=\begin{bmatrix} \sqrt{۳} & -۱ \\ \frac{۳}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}$ و ماتریس X در تساوی ماتریسی $X\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲|A| & |A| \\ ۱ & \frac{۲}{|A|} \end{bmatrix}$ صدق کند، آنگاه مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس X کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) -۱۸ ۳) -۱۴ ۴) ۱۸

۱۲) اگر A ماتریس مربعی و $aA+۳A^{-۱}=bI$ و ماتریس‌های $A-I$ و $A+۲I$ وارون هم باشند، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۲

۱۳) اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases} j-۲i & i>j \\ ij & i=j \\ ۲i-j & i<j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ & -۳ \\ -۴ & ۱ & -۲ \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های ستون سوم ماتریس $B\times A$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) صفر ۳) -۱۸ ۴) -۳۰

۱۴) اگر α در ناحیه اول مثلثاتی و $A=\begin{bmatrix} \sin\alpha+\cos\alpha & \sin\alpha-\cos\alpha \\ \sin\alpha-\cos\alpha & \sin\alpha+\cos\alpha \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} \frac{|A|}{۲} & \frac{|A|}{۲}\cot^{۲}\alpha \\ |A|\cot^{۲}\alpha & |A| \end{bmatrix}$ باشد آنگاه مقدار $\frac{|A|}{|B|}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $-\frac{\sin^{۲}\alpha}{\cos^{۴}\alpha}$ ۴) $\frac{\cos^{۴}\alpha}{\sin^{۲}\alpha}$

www.kanoon.ir

۱۵) اگر $A=\begin{bmatrix} a+c & a-۲b \\ ۲b+۱ & b \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری و $A^۲$ ماتریسی اسکالر باشد، بیشترین مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۲

۱۶) اگر $A=\begin{bmatrix} |A|+۳ & |A|-۴ \\ ۲|A|+۳ & |A|-۲ \end{bmatrix}$ و $\mathrm{AB}=A^{-۱}$ باشد، آنگاه مجموع درایه های قطر فرعی ماتریس B برابر کدام است؟ $(|A|<۰)$

۱) ۳ ۲) -۱ ۳) -۴ ۴) صفر

۱۷) اگر A و B دو ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۲، $\mathrm{AB}=\begin{bmatrix} \frac{۳}{۲} & -۱ \\ -۲ & -\frac{۴}{۳} \end{bmatrix}$ و

$B-\frac{۲}{۳}A\begin{bmatrix} ۹ & \frac{۹}{۲} \\ \frac{۳}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}B$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس $C=A\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ برابر کدام است؟

۱) -۱۶ ۲) -۴ ۳) -۱ ۴) صفر

۱۸) اگر $A_{۲\times ۲}$ یک ماتریس وارون‌پذیر و دو ماتریس A و $A-۳A^{-۱}$ وارون یکدیگر باشند، آنگاه ماتریس $(A+A^{-۱})^۲$ چند برابر I است؟

۱) ۵ ۲) $\frac{۲۵}{۴}$ ۳) $\frac{۲۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۱۹) ماتریس مربعی A از مرتبهٔ ۲ با دترمینان -۱ مفروض است. اگر $A^۲-A-I=\overline{O}$ باشد، حاصل دترمینان $A+۲I$ کدام است؟

۱) ± ۵ ۲) فقط -۵

۳) فقط ۵ ۴) ماتریس A با شرایط داده شده وجود ندارد.

۲۰) بیشترین مقدار $\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱+\mathrm{Sin}\,\theta & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱+\mathrm{Cos}\,\theta \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۳ ۴) ۲

۲۱) ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & x-۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲x & ۳ \end{bmatrix}$ مفروض است. به هر یک از درایه‌های آن به اندازهٔ شمارهٔ سطرشان اضافه کرده و از هر یک از آن‌ها به اندازهٔ شمارهٔ ستونشان کم می‌کنیم و ماتریس B را تشکیل می‌دهیم. اگر $|A|=|B|$ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) $\frac{۵۲}{۹}$ ۲) $\frac{۲۸}{۳}$ ۳) $\frac{۲۰}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۹}$

www.kanoon.ir

۲۲ ماتریس مربعی A از مرتبهٔ ۳ مفروض است. اگر $|A| = ||A|\,A| + \left|\frac{۱}{|A|}A\right|$ ۲ باشد، مقدار $|A|$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۳ کدام دستگاه معادلات زیر به ازای تمام مقادیر حقیقی m، دارای جواب منحصر به فرد است؟

۱) $\begin{cases} mx - y = ۱ \\ x - my = ۲ \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} mx - y = ۲ \\ ۳x + (m-۲)y = ۵ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} m^۲x + ۴y = ۳ \\ (m-۱)x + y = ۱ \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x + my = ۱ \\ mx + (m+۲)y = ۴ \end{cases}$

۲۴ اگر در دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$، وارون ماتریس ضرایب به صورت $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۲}{۵} \\ \frac{۱}{۵} & -\frac{۳}{۵} \end{bmatrix}$ و ماتریس مجهولات به صورت $\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس مقادیر معلوم این دستگاه کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۵ اگر A ماتریسی مربعی و غیرصفر از مرتبهٔ ۲ و $A^۲ = A$ باشد، آنگاه وارون ماتریس $I - ۵A$ کدام است؟

۱) $I + \frac{۵}{۴}A$ ۲) $I + \frac{۳}{۲}A$ ۳) $I - \frac{۳}{۲}A$ ۴) $I - \frac{۵}{۴}A$

۲۶ اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۶ \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های ماتریس $A + A^۲ + \ldots + A^۷$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۴ ۳) ۱۲ ۴) ۲۱

۲۷ برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ با درایه‌های صحیح و ماتریس $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & a \\ ۰ & \sqrt{۲}b & ۰ \\ c & ۰ & d \end{bmatrix}$، اگر $|A| = ۲$ و $B^۲ = ۲I$ باشد، حاصل‌ضرب درایه‌های غیرصفر ماتریس $B^۳$ کدام است؟

۱) $۳۲\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $-۳۲\sqrt{۲}$ ۴) $-۲\sqrt{۲}$

www-kanoon-ir

۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ماتریس ضرایب دستگاه به صورت $A=\begin{bmatrix}۳ & a\\ ۱ & b\end{bmatrix}$ است. داریم:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۱۴}\begin{bmatrix}b & -a\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-۱}B\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۴}\begin{bmatrix}b & -a\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۸\\ -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۸b+۲a}{۱۴}\\ -۱\end{bmatrix}\Rightarrow y=-۱$$

۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس D را پیدا می‌کنیم. بنابر فرض سؤال می‌نویسیم:

$$D=B\times C\times A=B\times A\times B\times A=(\mathrm{BA})(\mathrm{BA})=(\mathrm{BA})^{۲}\ (۱)$$

اکنون ماتریس BA را به دست می‌آوریم.

$$\mathrm{BA}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow|\mathrm{BA}|=۲$$

بنابراین: $(۱)\text{ از }\Rightarrow|D|=\left|(\mathrm{BA})^{۲}\right|=|\mathrm{BA}|^{۲}=۲^{۲}=۴$

۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$A=B\times C=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۰\\ -۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس $A^{۲}$ را پیدا می‌کنیم:

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۰\\ -۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۰\\ -۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & -۲\\ ۰ & ۱ & ۰\\ -۲ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$A^{۵}$ درایهٔ سطر سوم ستون اول = ($A^{۲}$سطر سوم)A($A^{۲}$ستون اول)

$$=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۰\\ -۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۰\\ -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴ & ۰ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۰\\ -۲\end{bmatrix}=-۸-۸=-۱۶$$

۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

۱) درست $|\mathrm{BA}-I|=\left|\mathrm{BA}-\mathrm{BB}^{-۱}\right|=|B|\left|A-B^{-۱}\right|=\left|A-B^{-۱}\right||B|=|\mathrm{AB}-I|$

۲) درست $\left|\mathrm{ABA}^{-۱}-۲I\right|=\left|\mathrm{ABA}^{-۱}-۲\mathrm{AA}^{-۱}\right|=|A|\,|B-۲I|\left|A^{-۱}\right|=|B-۲I|$

۳) نادرست؛ برای ماتریس‌های مربعی A و B از مرتبهٔ ۳ داریم:

$$|A-B|=|-(B-A)|=(-۱)^{۳}|B-A|=-|B-A|$$

۴) درست $\left|(A^{-۱}\mathrm{BA})^{۲}\right|=\left|A^{-۱}B^{۲}A\right|=\left|A^{-۱}\right||B|^{۲}|A|=|B|^{۲}$

www.kanoon.ir

۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از دستور ساروس داریم:

$$\begin{vmatrix} ۰ & x & \text{Log}\, x \\ -x & ۰ & x^۲ - ۱ \\ -\text{Log}\, x & ۱ - x^۲ & ۰ \end{vmatrix} \begin{matrix} ۰ & x \\ -x & ۰ \\ -\text{Log}\, x & ۱ - x^۲ \end{matrix}$$

$$= \underbrace{\underbrace{(۰ - x(x^۲ - ۱)\text{Log}\, x}_{\text{قرینه}} - x(۱ - x^۲)\text{Log}\, x)}_{\text{قرینه}} - (۰ + ۰ + ۰) = ۰$$

دترمینان فوق همواره به ازای $x > ۰$ (دامنهٔ تعریف لگاریتم) برابر صفر است؛ پس معادله بی‌شمار جواب دارد.

۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$|A| = ۱۰ \xrightarrow{\text{بسط حول سطر دوم}} ۱ \times (-۱)^{۲+۱} \underbrace{\begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix}}_{۲} + ۲ \times (-۱)^{۲+۲} \underbrace{\begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix}}_{۳} + ۳ \times (-۱)^{۲+۳} \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = ۱۰$$

$$\Rightarrow -۱ \times (۲) + ۲ \times ۳ - ۳ \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = ۱۰ \Rightarrow -۳ \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = ۶ \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = -۲ \Rightarrow ay - bx = -۲$$

۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا از طرفین ماتریس A دترمینان می‌گیریم.

$$|A| = \begin{vmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ |A| & ۲ & m \\ ۲ & -۱ & -۱ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{سطر اول}} |A| = -۱(-۲ + m) + ۱(-|A| - ۴) \Rightarrow |A| = ۲ - m - |A| - ۴$$

$$\Rightarrow ۲|A| = -m - ۲ \Rightarrow |A| = \frac{-m - ۲}{۲} = -\frac{m}{۲} - ۱$$

می‌دانیم عدد از دترمینان بیرون بیاید به توان مرتبهٔ ماتریس می‌رسد. پس:

$$\underbrace{|(|A| + ۱)A^۳|}_{\text{عدد}} = ۸ \Rightarrow (|A| + ۱)^۳ |A|^۳ = \left(-\frac{m}{۲} - ۱ + ۱\right)^۳ \left(-\frac{m}{۲} - ۱\right)^۳ = ۸$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{m}{۲}\right)^۳ \left(-\frac{m}{۲} - ۱\right)^۳ = ۲^۳ \Rightarrow \left[\frac{m}{۲}\left(\frac{m}{۲} + ۱\right)\right]^۳ = ۲^۳ \Rightarrow \frac{m}{۲}\left(\frac{m}{۲} + ۱\right) = ۲$$

$$\Rightarrow \frac{m^۲}{۴} + \frac{m}{۲} = ۲ \xrightarrow{\times ۴} m^۲ + ۲m - ۸ = ۰ \Rightarrow (m - ۲)(m + ۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۲ \\ m = -۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع}} -۲$$

www.kanoon.ir

۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} \xrightarrow{b_{ij}=3^{(i+j-2)}a_{ij}} B=\begin{bmatrix} a_{11} & 3a_{12} & 9a_{13}\\ 3a_{21} & 9a_{22} & 27a_{23}\\ 9a_{31} & 27a_{32} & 81a_{33}\end{bmatrix}$$

در محاسبهٔ دترمینان B از سطرهای دوم و سوم و همچنین ستون‌های دوم و سوم به ترتیب از ۳ و ۹ می‌توانیم فاکتور بگیریم.

$$|B|=\begin{vmatrix} a_{11} & 3a_{12} & 9a_{13}\\ 3a_{21} & 9a_{22} & 27a_{23}\\ 9a_{31} & 27a_{32} & 81a_{33}\end{vmatrix} \Rightarrow |B|=(3)(9)(3)(9)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 81=(3)(9)(3)(9)\,|A| \Rightarrow |A|=\frac{1}{9}$$

۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس A^{-1} را پیدا می‌کنیم.

$$A^2+A-I=\bar{o} \Rightarrow A(A+I)=I \Rightarrow A^{-1}=A+I \xrightarrow{\text{توان }2} (A^{-1})^2=(A+I)^2$$

$$\Rightarrow (A^2)^{-1}=A^2+I+2A \xrightarrow{A^2=I-A} (A^2)^{-1}=I-A+I+2A$$

$$\Rightarrow (A^2)^{-1}=2I+A \xrightarrow{A^{-1}\times} (A^3)^{-1}=2A^{-1}+I \xrightarrow{A^{-1}=A+I}$$

$$(A^3)^{-1}=2(A+I)+I \Rightarrow (A^3)^{-1}=2A+3I$$

۱۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$(A-B)(A+B)=A^2+AB-BA-B^2$$

بنابراین:

$$(A-B)(A+B)=(A^2+AB)-(B^2+BA)$$

$$(A-B)(A+B)=\begin{bmatrix} -6 & -8\\ 9 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & 4\\ 7 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -9 & -12\\ 2 & 5\end{bmatrix} \xrightarrow{(A-B)^{-1}\times}$$

$$A+B=(A-B)^{-1}\times\begin{bmatrix} -9 & -12\\ 2 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow A+B=\frac{1}{3-6}\begin{bmatrix} 1 & 3\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -9 & -12\\ 2 & 5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A+B=\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 3\\ -12 & -9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

حال ماتریس A را می‌یابیم.

$$\left.\begin{aligned} A-B&=\begin{bmatrix} 3 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}\\ A+B&=\begin{bmatrix} 1 & -1\\ 4 & 3\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \xrightarrow{+} 2A=\begin{bmatrix} 4 & -4\\ 2 & 4\end{bmatrix} \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} A=\begin{bmatrix} 2 & -2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

A⇒ مجموع درایه‌های = ۳

www.kanoon.ir

۱۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا $|A|$ را پیدا می‌کنیم.

$$|A| = \begin{vmatrix} \sqrt{۳} & -۱ \\ \frac{۳}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{vmatrix} = \frac{۳}{۲} + \frac{۳}{۲} = ۳$$

پس تساوی ماتریسی داده شده به صورت زیر درمی‌آید.

$$\begin{bmatrix} ۲|A| & |A| \\ ۱ & \frac{۲}{|A|} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۶ & ۳ \\ ۱ & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} ۶ & ۳ \\ ۱ & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix}^{-۱} = \frac{۱}{۱} \begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & -۳ \\ -۱ & ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & -۳ \\ -۱ & ۶ \end{bmatrix}$$

اکنون طرفین رابطهٔ ۱ را از چپ در وارون ماتریس $\begin{bmatrix} ۶ & ۳ \\ ۱ & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix}$ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} ۶ & ۳ \\ ۱ & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & -۳ \\ -۱ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & -۳ \\ -۱۵ & ۶ \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس X برابر ۱۸- است.

۱۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$aA + ۳A^{-۱} = bI \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{۳}(-aA + bI) \quad (۱)$$

از طرفی ماتریس‌های $A - I$ و $A + ۲I$ وارون یکدیگرند. پس:

$$(A - I)(A + ۲I) = I \Rightarrow A^{۲} + ۲A - A - ۲I = I \Rightarrow A^{۲} + A = ۳I \Rightarrow A(A + I) = ۳I$$

$$\Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{۳}(A + I) \quad (۲)$$

با مقایسهٔ روابط ۱ و ۲ داریم:

$$\frac{۱}{۳}(-aA + bI) = \frac{۱}{۳}(A + I) \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ b = ۱ \end{cases} \Rightarrow a + b = ۰$$

۱۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای به دست آوردن ستون سوم ماتریس BA کافی است $B \times \begin{bmatrix} \text{ستون} \\ \text{سوم} \\ A \end{bmatrix}$ را به دست آوریم.

ابتدا باید ستون سوم A را با توجه به تعریف داده شده بنویسیم.

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \bigcirc & \bigcirc & -۱ \\ \bigcirc & \bigcirc & ۱ \\ \bigcirc & \bigcirc & ۹ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\text{ستون سوم BA} = B \times \begin{bmatrix} \text{ستون} \\ \text{سوم} \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ & -۳ \\ -۴ & ۱ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \\ ۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲۰ \\ -۲۵ \\ -۱۳ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ستون سوم BA برابر است با:

$$۲۰ - ۲۵ - ۱۳ = -۱۸$$

www.kanoon.ir

۱۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$|A| = (\sin\alpha + \cos\alpha)^{۲} - (\sin\alpha - \cos\alpha)^{۲}$$

$$= \underbrace{\sin^{۲}\alpha + \cos^{۲}\alpha}_{۱} + ۲\sin\alpha\cos\alpha - \underbrace{(\sin^{۲}\alpha + \cos^{۲}\alpha}_{۱} - ۲\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow |A| = ۴\sin\alpha\cos\alpha = ۲(۲\sin\alpha\cos\alpha) = ۲\sin ۲\alpha \quad (۱)$$

حال با توجه به مقدار $|A|$، ماتریس B را بازنویسی می‌کنیم و دترمینان آن را محاسبه می‌کنیم.

$$B = \begin{bmatrix} \frac{۲\sin ۲\alpha}{۲} & \frac{۲\sin ۲\alpha}{۲} \times \frac{\cos ۲\alpha}{\sin ۲\alpha} \\ ۲\sin ۲\alpha \times \frac{\cos ۲\alpha}{\sin ۲\alpha} & ۲\sin ۲\alpha \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \sin ۲\alpha & \cos ۲\alpha \\ ۲\cos ۲\alpha & ۲\sin ۲\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = ۲\sin^{۲}۲\alpha - ۲\cos^{۲}۲\alpha$$

می‌دانیم: $\cos ۲\theta = \cos^{۲}\theta - \sin^{۲}\theta$، پس:

$$|B| = -۲(\cos^{۲}۲\alpha - \sin^{۲}۲\alpha) = -۲\cos ۴\alpha \quad (۲) \xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{|A|}{|B|} = \frac{۲\sin ۲\alpha}{-۲\cos ۴\alpha} = -\frac{\sin ۲\alpha}{\cos ۴\alpha}$$

می‌توانستیم به جای α یک مثال عددی در ناحیه اول بزنیم و حل کنیم.

۱۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون ماتریس A، ماتریسی قطری است، پس درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن برابر صفر هستند. داریم:

$$۲b + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲b = -۱ \Rightarrow b = -\frac{۱}{۲}$$

$$a - ۲b = ۰ \Rightarrow a + ۱ = ۰ \Rightarrow a = -۱$$

با جایگذاری مقادیر a و b در ماتریس A داریم:

$$A = \begin{bmatrix} (c-۱) & ۰ \\ ۰ & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{۲} = \begin{bmatrix} (c-۱)^{۲} & ۰ \\ ۰ & \left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۲} \end{bmatrix}$$

ماتریس $A^{۲}$، ماتریسی اسکالر است، پس درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن برابر یکدیگرند:

$$(c-۱)^{۲} = \left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۲} \Rightarrow \begin{cases} c - ۱ = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow c = \frac{۱}{۲} \\ c - ۱ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow c = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

$$\max(a+b+c) = -۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۲} = ۰$$

دقت کنید که اگر A ماتریس قطری باشد مثلاً $A = \begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b \end{bmatrix}$ آنگاه $A^{n} = \begin{bmatrix} a^{n} & ۰ \\ ۰ & b^{n} \end{bmatrix}$

www.kanoon.ir

۱۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا دترمینان ماتریس A را پیدا می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}|A|+۳ & |A|-۴\\ ۲|A|+۳ & |A|-۲\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}|A|+۳ & |A|-۴\\ ۲|A|+۳ & |A|-۲\end{vmatrix}$$

$$|A|=(|A|^۲+|A|-۶)-(۲|A|^۲-۵|A|-۱۲)\Rightarrow |A|=-|A|^۲+۶|A|+۶$$

$$\Rightarrow |A|^۲-۵|A|-۶=۰\Rightarrow (|A|-۶)(|A|+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases}|A|=۶ \text{ غ ق ق}\\ |A|=-۱\end{cases}$$

دقت کنید! با توجه به فرض سؤال $|A|<۰$ قابل قبول است. بنابراین:

$$|A|=-۱\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۲ & -۵\\ ۱ & -۳\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix}-۳ & ۵\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & -۵\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}$$

$$AB=A^{-۱}\xrightarrow{A^{-۱}\times} B=(A^{-۱})^۲=\begin{bmatrix}۳ & -۵\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & -۵\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & -۵\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس B برابر ۴- است.

۱۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از ماتریس‌های A و B به ترتیب از چپ و راست در عبارت داده شده فاکتور می‌گیریم.

$$A\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}B-\frac{۲}{۳}A\begin{bmatrix}۹ & \frac{۹}{۲}\\ \frac{۳}{۲} & \frac{۳}{۲}\end{bmatrix}B=A\left(\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}-\frac{۲}{۳}\begin{bmatrix}۹ & \frac{۹}{۲}\\ \frac{۳}{۲} & \frac{۳}{۲}\end{bmatrix}\right)B$$

$$=A\begin{bmatrix}-۲ & ۰\\ ۰ & -۲\end{bmatrix}B=A(-۲I)B=-۲AB\Rightarrow C=-۲AB\Rightarrow |C|=|-۲AB|=(-۲)^۲|AB|$$

$$=۴\begin{vmatrix}\frac{۳}{۲} & -۱\\ -۲ & -\frac{۴}{۳}\end{vmatrix}=۴(-۲-۲)=-۱۶$$

۱۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

طبق فرض : $A-۳A^{-۱}=A^{-۱}\Rightarrow A=۴A^{-۱}\ (۱)$

$$\xrightarrow{(۱)}(A+A^{-۱})^۲=(۴A^{-۱}+A^{-۱})^۲=(۵A^{-۱})^۲=۲۵(A^{-۱})^۲$$

$$\xrightarrow{(۱)}=۲۵\left(\frac{۱}{۴}A\right)^۲\Rightarrow (A+A^{-۱})^۲=۲۵\times\frac{۱}{۱۶}A^۲\ (۲)$$

از طرفی با استفاده از (۱) می‌نویسیم:

$$A=۴A^{-۱}\xrightarrow{\times A}A^۲=۴I\xrightarrow{(۲)}(A+A^{-۱})^۲=۲۵\times\frac{۱}{۱۶}\times۴I=\frac{۲۵}{۴}I$$

۱۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق فرض سؤال داریم: $A^۲-A-I=\overline{O}\Rightarrow A^۲=A+I$

از طرفین رابطهٔ اخیر، دترمینان می‌گیریم: $|A+I|=|A^۲|=|A|^۲=(-۱)^۲=۱$

با فرض $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ داریم: $|A|=-۱\Rightarrow\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=-۱\Rightarrow ad-bc=-۱\ (۱)$

$$|A+I|=۱\Rightarrow\begin{vmatrix}a+۱ & b\\ c & d+۱\end{vmatrix}=۱\Rightarrow ad+a+d+۱-bc=۱\xrightarrow{ad-bc=-۱}$$

$$a+d=۱\quad (۲)$$

دترمینان ماتریس مورد نظر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$|A+۲I|=\begin{vmatrix}a+۲ & b\\ c & d+۲\end{vmatrix}=ad+۲(a+d)+۴-bc\xrightarrow{(۱),(۲)}-۱+۲+۴=۵$$

www.kanoon.ir

۲۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دترمینان ماتریس داده شده را با دستور ساروس محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱+\text{Sin}\,\theta & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱+\text{Cos}\,\theta \end{vmatrix} \begin{matrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱+\text{Sin}\,\theta \\ ۱ & ۱ \end{matrix}$$

$$\Rightarrow ((۱+\text{Sin}\,\theta)(۱+\text{Cos}\,\theta)+۱+۱)-((۱+\text{Sin}\,\theta)+۱+(۱+\text{Cos}\,\theta))$$

$$\Rightarrow (\text{Sin}\,\theta\,\text{Cos}\,\theta+\text{Sin}\,\theta+\text{Cos}\,\theta+۳)-(\text{Sin}\,\theta+\text{Cos}\,\theta+۳)=\text{Sin}\,\theta\,\text{Cos}\,\theta=\frac{۱}{۲}\text{Sin}\,۲\theta$$

$$\xrightarrow{-۱\le \text{Sin}\,۲\theta\le ۱} -\frac{۱}{۲}\le \frac{۱}{۲}\text{Sin}\,۲\theta\le \frac{۱}{۲}$$

طبق نامساوی به دست آمده، بیشترین مقدار ممکن دترمینان داده شده $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد.

۲۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ماتریس B را تشکیل داده و دترمینان آن را بر حسب سطر دوم به دست می‌آوریم:

$$B=\begin{bmatrix} ۲ & x-۱ & -۳ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۴ & ۲x+۱ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow |B|=۲\times(-۱)^{۲+۲}\times\begin{vmatrix} ۲ & -۳ \\ ۴ & ۳ \end{vmatrix}=۲\times۱\times(۶+۱۲)=۳۶$$

دترمینان ماتریس A را نیز بر حسب سطر اول به دست می‌آوریم:

$$|A|=۲\times(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۲x & ۳ \end{vmatrix}+x\times(-۱)^{۱+۲}\times\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix}+(-۱)\times(-۱)^{۱+۳}\times\begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۲x \end{vmatrix}$$

$$=۲(۶-۲x)-x(-۳-۲)-(-۲x-۴)=۳x+۱۶$$

از تساوی $|B|=|A|$ نتیجه می‌شود: $۳x+۱۶=۳۶\Rightarrow ۳x=۲۰\Rightarrow x=\frac{۲۰}{۳}$

۲۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از خواص دترمینان طرفین تساوی داده شده را تا جای ممکن ساده می‌کنیم:

$$۲|A|=||A|A|+\left|\frac{۱}{|A|}A\right|\xrightarrow[k\in\text{R},A_{۳\times۳}]{|\text{kA}|=k^{۳}|A|} ۲|A|=(|A|)^{۳}|A|+\left(\frac{۱}{|A|}\right)^{۳}|A|$$

$$\Rightarrow ۲|A|=|A|^{۴}+\frac{۱}{|A|^{۲}}\xrightarrow{\times|A|^{۲}} ۲|A|^{۳}=|A|^{۶}+۱\Rightarrow |A|^{۶}-۲|A|^{۳}+۱=۰\Rightarrow (|A|^{۳}-۱)^{۲}=۰$$

$$\Rightarrow |A|^{۳}=۱\Rightarrow |A|=۱$$

۲۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دستگاه معادلات دو معادله دو مجهول در صورتی جواب منحصر به فرد دارد که دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه مخالف صفر باشد. بنابراین دستگاهی به ازای تمام مقادیر حقیقی m دارای جواب منحصر به فرد است که دترمینان آن همواره مخالف صفر باشد. بررسی گزینه‌ها:

$$۱)\ A=\begin{bmatrix} m & -۱ \\ ۱ & -m \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=-m^{۲}+۱=۰\Rightarrow m=\pm ۱$$

$$۲)\ A=\begin{bmatrix} m & -۱ \\ ۳ & m-۲ \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=m(m-۲)+۳=m^{۲}-۲m+۳=۰$$

$\Rightarrow \Delta<۰\Rightarrow$ معادله فاقد ریشه حقیقی است.

$$۳)\ A=\begin{bmatrix} m^{۲} & ۴ \\ m-۱ & ۱ \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=m^{۲}-۴(m-۱)=m^{۲}-۴m+۴=۰\Rightarrow (m-۲)^{۲}=۰\Rightarrow m=۲$$

$$۴)\ A=\begin{bmatrix} ۱ & m \\ m & m+۲ \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=(m+۲)-m^{۲}=-m^{۲}+m+۲=۰\Rightarrow m^{۲}-m-۲=۰$$

$$\Rightarrow (m-۲)(m+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} m=۲ \\ m=-۱ \end{cases}$$

بنابراین دستگاه معادلات گزینهٔ ۲ به ازای تمام مقادیر حقیقی m، دارای جواب منحصر به فرد است.

www-kanoon-ir

۲۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم وارونِ وارون یک ماتریس، برابر خود آن ماتریس است، پس کافی است وارونِ وارون ماتریس ضرایب دستگاه را به دست آورده و در ماتریس مجهولات ضرب کنیم.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5}\end{bmatrix}\xrightarrow{((A^{-1})^{-1})=A} A=\frac{1}{-\frac{1}{5}}\begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$AX=B\Rightarrow B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 3\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس مقادیر معلوم دستگاه، برابر $4+3=7$ است.

۲۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به گزینه‌ها داریم: $(I-5A)^{-1}=I+mA$

بنابراین با توجه به تعریف ماتریس وارون، می‌توان نوشت:

$$(I-5A)(I+mA)=I\Rightarrow I+mA-5A-5mA^{2}=I\Rightarrow I+(m-5-5m)A=I$$

$$\downarrow$$

$$A$$

$$\Rightarrow(-4m-5)A=\overline{O}$$

چون ماتریس A غیرصفر است، پس ضریب A لزوماً باید صفر باشد، بنابراین:

$$-4m-5=0\Rightarrow m=-\frac{5}{4}\Rightarrow(I-5A)^{-1}=I-\frac{5}{4}A$$

۲۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$7A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{bmatrix}\Rightarrow A=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{bmatrix}$$

$$A^{2}=A\times A=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{bmatrix}\times\frac{1}{7}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{bmatrix}=\frac{1}{49}\begin{bmatrix}7 & 21\\ 14 & 42\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{bmatrix}=A$$

$$A^{2}=A\xrightarrow{\times A}A^{3}=A^{2}=A\xrightarrow{\times A}A^{4}=A^{2}=A\rightarrow\ldots\Rightarrow A^{n}=A$$

$$A+A^{2}+\ldots+A^{7}=A+A+\ldots+A=7A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ مجموع درایه‌ها $=1+3+2+6=12$

www.kanoon.ir

۲۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از فرض‌های مسئله مقادیر صحیح d, c, b, a را به دست می‌آوریم.

$$B^۲ = ۲I \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & a \\ ۰ & \sqrt{۲}b & ۰ \\ c & ۰ & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & a \\ ۰ & \sqrt{۲}b & ۰ \\ c & ۰ & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱+\mathrm{ac} & ۰ & a+\mathrm{ad} \\ ۰ & ۲b^۲ & ۰ \\ c+\mathrm{dc} & ۰ & \mathrm{ac}+d^۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} ۱+\mathrm{ac} = ۲ \Rightarrow \mathrm{ac} = ۱ \Rightarrow a \neq ۰ ,\ c \neq ۰ \\ ۲b^۲ = ۲ \Rightarrow b^۲ = ۱ \Rightarrow b = \pm ۱ \\ c+\mathrm{dc} = ۰ \Rightarrow c(۱+d) = ۰ \xrightarrow{c \neq ۰} ۱+d = ۰ \Rightarrow d = -۱ \end{cases}$$

(حالت اول) $|A| = ۲ \Rightarrow \mathrm{ad}-\mathrm{bc} = ۲ \xrightarrow[b=۱]{d=-۱} -a-c = ۲ \Rightarrow a+c = -۲$

$\xrightarrow{\mathrm{ac}=۱} a = -۱, c = -۱$

(حالت دوم) $|A| = ۲ \Rightarrow \mathrm{ad}-\mathrm{bc} = ۲ \xrightarrow[b=-۱]{d=-۱} -a+c = ۲ \xrightarrow{c=\frac{۱}{a}} -a+\frac{۱}{a} = ۲$

$$\Rightarrow -a^۲ + ۱ = ۲a \Rightarrow a^۲ + ۲a - ۱ = ۰ \Rightarrow a = \frac{-۲ \pm \sqrt{۴+۴}}{۲}$$

این مقدار برای a قابل قبول نیست چون $a = -۱$ صحیح است. پس $c = -۱$ و $d = -۱$ و $b = ۱$ می‌باشد. داریم:

$$B^۳ = B^۲ \times B = ۲I \times B = ۲B = ۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & a \\ ۰ & \sqrt{۲}b & ۰ \\ c & ۰ & d \end{bmatrix} = ۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & \sqrt{۲} & ۰ \\ -۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۲\sqrt{۲} & ۰ \\ -۲ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

در نتیجه حاصلضرب درایه‌های غیرصفر ماتریس $B^۳$ برابر $۲(-۲)(۲\sqrt{۲})(-۲)(-۲) = -۳۲\sqrt{۲}$ است.

www-kanoon-ir

پاسخنامه کلیدی

۱	**۱**	۲	۳	۴
۲	**۱**	۲	۳	۴
۳	**۱**	۲	۳	۴
۴	۱	۲	**۳**	۴
۵	۱	۲	۳	**۴**
۶	۱	**۲**	۳	۴
۷	**۱**	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	**۴**
۹	۱	۲	**۳**	۴
۱۰	۱	**۲**	۳	۴
۱۱	۱	**۲**	۳	۴
۱۲	**۱**	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	**۳**	۴
۱۴	۱	۲	**۳**	۴
۱۵	**۱**	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	**۳**	۴
۱۷	**۱**	۲	۳	۴
۱۸	۱	**۲**	۳	۴
۱۹	۱	۲	**۳**	۴
۲۰	۱	**۲**	۳	۴
۲۱	۱	۲	**۳**	۴
۲۲	۱	۲	**۳**	۴
۲۳	۱	**۲**	۳	۴
۲۴	۱	۲	**۳**	۴
۲۵	۱	۲	۳	**۴**
۲۶	۱	۲	**۳**	۴
۲۷	۱	۲	**۳**	۴

www-kanoon-ir