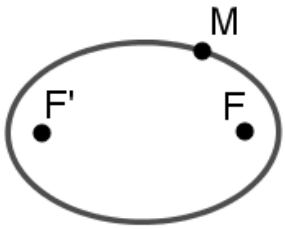
سؤالات شبه نهایی درس : هندسه (۳)	بسمه تعالی	تاریخ امتحان : ۱۴۰۲/۰۱/۲۲
پایه دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه	آموزش و پرورش استان کرمانشاه	زمان امتحان : ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی :	مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی	تعداد صفحات : ۲ صفحه
دانش آموزان سراسر استان در فروردین ۱۴۰۲	(نوبت صبح)	تعداد سؤالات: ۱۶

امام علی (ع) فرمود: کسی که با دانش خود به پیکار با جهلِ خویش برخیزد، به بالاترین خوشبختی می رسد.

ردیف	سؤالات	بارم
۱	درستی یا نادرستی هر یک عبارات زیر را مشخص کنید. الف) نقطه $(۳,-۲,۰)$ روی صفحه xoy قرار دارد. ب) اگر $A^۲=A$ باشد، در این صورت داریم: $(A+I)^۲=I+۳A$.	۰/۵
۲	جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید. الف) بیضی مکان هندسی نقطه هایی از صفحه است که ..... فاصله هایشان از دو نقطه ثابت در آن صفحه یک مقدار ثابت است. ب) حاصل ضرب ماتریس ها خاصیت جابجایی	۰/۵
۳	با استفاده از روش ساروس، دترمینان ماتریس زیر را به دست آورید. $A=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۱\\ ۳ & -۱ & ۱\\ ۴ & ۲ & ۰\end{bmatrix}$	۱
۴	اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۱ & x\\ ۲y & ۱\end{bmatrix}$ و $A\times B$ ماتریسی قطری باشد، x و y را بیابید.	۱/۵
۵	ماتریس مربعی از مرتبه ۳ مشخص کنید به طوری که $a_{ij}=\begin{cases}۲i-j & i\le j\\ ۲j-i & i>j\end{cases}$.	۱
۶	معادله دایره ای را بنویسید که نقطه های $A(۴,-۱)$ و $B(-۲,۱)$ دو سر قطری از آن باشند.	۱/۵
۷	نقطه های A، B و C در صفحه مفروضند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از نقطه C به فاصله ۳ سانتی متر باشد. (بحث کنید.)	۱/۵
۸	اگر خروج از مرکز بیضی برابر با $\frac{۳}{۵}$ و طول قطر کوچک بیضی ۱۶ باشد، طول قطر بزرگ بیضی و فاصله کانونی را به دست آورید.	۱/۵
۹	معادله سهمی به رأس $A(۲,۱)$ و کانون $F(۲,۵)$ را به دست آورده و معادله خط هادی آن را بنویسید.	۱/۵

ادامه سؤالات در صفحه دوم ⟵

www-kanoon-ir

ردیف	سؤالات	بارم
۱۰	در شکل زیر، نقطه M روی بیضی و کانون های F و F' مشخص شده اند. خط d را به گونه ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه ای مانند N قطع کند. ثابت کنید: $NF' = MF'$  	۱/۷۵
۱۱	نقطه های $A=(-۱,۲,۳)$، $B=(-۲,۴,۱)$ و $C=(۱,۳,۵)$ سه رأس مثلث ABC هستند. الف) کسینوس زاویه A از مثلث ABC را حساب کنید. ب) مساحت مثلث ABC را تعیین کنید.	۱/۵
۱۲	اگر $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{b}=\vec{j}-\vec{k}$ باشند، طول بردار $\vec{a}+\vec{b}$ را به دست آورید.	۱
۱۳	اگر $\lvert a\rvert=\lvert b\rvert$، $\lvert a-b\rvert=۲\sqrt{۳}$ و $\lvert a+b\rvert=۶$ باشند، زاویه بین دو بردار a و b را به دست آورید.	۱/۵
۱۴	برای بردارهای a و b ثابت کنید: $\lvert a+b\rvert\le\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$.	۱/۵
۱۵	اگر $a+b=(۲,۳,۴)$ و $a=i+۲j-۳k$ باشد، بردار b را به دست آورید.	۱/۵
۱۶	اگر i، j و k بردارهای واحد باشند، حاصل عبارت روبرو را به دست آورید. $(i+j-k)\times(i-j)$	۰/۷۵
	سربلندی شما آرزوی ماست. جمع بارم	۲۰نمره

www.kanoon.ir

پاسخ‌نامه هندسه ۳ — رشته ریاضی

(۱) الف) درست (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵)

(۲) الف) مجموع (۰/۲۵) ب) ندارد (۰/۲۵)

(۳) $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow |A|=(0+0+6)-(-4+0+4)=2$ (۰/۲۵ + ۰/۲۵ + ۰/۲۵ + ۰/۲۵)

(۴) $AXB=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & x\\ 2y & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-4y & 3x-2\\ 2+2y & 2x+1\end{bmatrix}$ (۱)

$3x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$ (۰/۲۵) و $2+2y=0 \Rightarrow y=-1$ (۰/۲۵)

(۵) $A_{3\times3}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}$ (۰/۷۵)

(۰/۲۵)

(۶) مرکز دایره نقطه وسط پاره خط AB است. (۰/۲۵)

$AB=\sqrt{(4+2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$ (۰/۲۵)

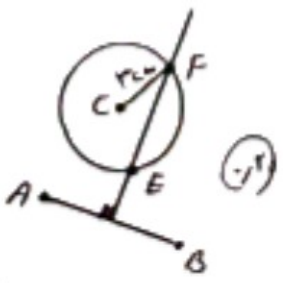
$O=\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{2-1}{2}\right)=(1, \frac{1}{2})$ (۰/۲۵) $\quad R=\frac{2\sqrt{10}}{2}=\sqrt{10}$ (۰/۲۵)

معادله دایره: $(x-1)^2+y^2=10$ (۰/۵)

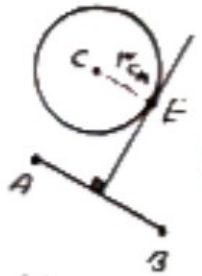
(۷) اگر بخواهیم نقاط از A و B به یک فاصله باشند، باید روی عمود منصف پاره خط AB قرار داشته باشند و همچنین اگر بخواهیم نقاط از نقطه C به فاصله ۳ سانتی متر باشند باید روی دایره‌ای به مرکز C و شعاع $3cm$ واقع شوند. (۰/۲۵)

طرز رسم: عمود منصف پاره خط AB را رسم کرده و دایره‌ای به مرکز C و شعاع $3cm$ رسم می‌کنیم، محل برخورد دایره با عمود منصف AB جواب مسئله است. (۰/۵)

نکته: ۱- هرگاه عمود منصف دایره را در دو نقطه قطع کند، مسئله دو جواب دارد.
۲- هرگاه عمود منصف بر دایره مماس شود، مسئله یک جواب دارد.
۳- هرگاه عمود منصف دایره را قطع نکند، مسئله جواب ندارد.



(۰/۲) E و F جواب‌های مسئله‌اند.



(۰/۲۵) E جواب مسئله است



(۰/۲۵) مسئله جواب ندارد.

www.kanoon.ir

(۸) $\frac{c}{a}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow c=\frac{۳}{۵}a$ (۰/۲۵) ، $۲b=۱۶ \Rightarrow b=۸$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow a^۲=۶۴+\frac{۹}{۲۵}a^۲$

$\Rightarrow a^۲=۱۰۰ \Rightarrow a=۱۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۲a=۲۰$ (۰/۲۵) طول قطر بزرگ ، $c=\frac{۳}{۵}a=\frac{۳}{۵}(۱۰)=۶ \Rightarrow ۲c=۱۲$ فاصله کانونی (۰/۵)

---

(۹) شاخه‌های سهمی رو به بالاست.

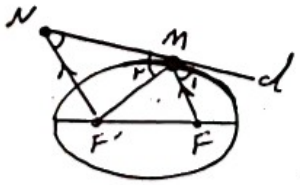
$A=(h,k)=(۲,۱) \Rightarrow h=۲, k=۱$ (۰/۲۵)

$F=(h,a+k)=(۲,۵) \Rightarrow \begin{cases} h=۲ & (۰/۲۵) \\ a+k=۵ \to a+۱=۵ \to a=۴ & (۰/۲۵) \end{cases}$ (۰/۲۵)

معادله خط‌هاری: $y=-a+k \to y=-۴+۱ \to y=-۳$ ، معادله سهمی: $(x-۲)^۲=۱۶(y-۱)$ (۰/۲۵)

---

(۱۰) نباید درگیری بازتابندگی در بیضی $\hat{M}_۱=\hat{M}_۲$ می‌باشد، داریم: (۰/۲۵)



(۰/۵)

$\hat{M}_۱=\hat{M}_۲$
$MF \parallel NF'$ و MN مورب $\Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{N}$
$\Rightarrow \hat{N}=\hat{M}_۲ \Rightarrow NF'=MF'$ (۰/۲۵)

(۰/۵)

---

(۱۱) الف) $\overrightarrow{AB}=(-۲-(-۱), ۴-۲, ۱-۳) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-۱,۲,-۲)$ (۰/۲۵)

$\overrightarrow{AC}=(۱-(-۱), ۳-۲, ۵-۳) \Rightarrow \overrightarrow{AC}=(۲,۱,۲)$ (۰/۲۵)

$\cos\hat{A}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{-۲+۲-۴}{\sqrt{۱+۴+۴}\times\sqrt{۴+۱+۴}}=-\frac{۴}{۹}$ (۰/۵)

ب) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -۱ & ۲ & -۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \end{vmatrix}=۶i-۲j-۵k$ (۰/۲۵) ، $S_{\triangle ABC}=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۵}$ (۰/۲۵)

---

(۱۲) ابتدا مختصات $\vec{a}+\vec{b}$ را حساب کرده و سپس طول آن را به دست می‌آوریم:

$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j} \Rightarrow \vec{a}=(۱,۱,۰)$
$\vec{b}=\vec{j}-\vec{k} \Rightarrow \vec{b}=(۰,۱,-۱)$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=(۱,۲,-۱)$ (۰/۲۵) ، $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{۱^۲+۲^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۶}$ (۰/۲۵)

---

(۱۳) $|a+b|^۲-|a-b|^۲=۴a.b=۳۶-۱۲=۲۴ \to a.b=۶$ (۰/۵)

$|a-b|^۲=|a|^۲+|b|^۲-۲a.b \xrightarrow{|a|=|b|} |a|=|b|=۲\sqrt{۳}$ (۰/۵)

$\cos\theta=\frac{a.b}{|a||b|}=\frac{۶}{۲\sqrt{۳}\times۲\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta=۶۰^\circ$ (۰/۵)

www.konoon.ir

پاسخنامه هندسه ۳ — نوبت صبح

(۱۴) اگر θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، داریم: (۰/۲۵) $|a+b|^2 = |a|^2+|b|^2+2|a||b|\cos\theta$

(۰/۵) $\cos\theta \le 1 \xrightarrow{\times 2|a||b|} 2|a||b|\cos\theta \le 2|a||b|$

$|a+b| \le |a|+|b| \longrightarrow |a+b|^2 \le (|a|+|b|)^2 \Rightarrow |a+b|^2 \le |a|^2+|b|^2+2|a||b| \longrightarrow |a+b|^2 \le |a|^2+|b|^2+2|a||b|\cos\theta$

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

(۱۵) $\vec{a}+\vec{b} = (2,3,4) = \vec{c}$ (۰/۲۵) , $\vec{a} = i+2j-3k = (1,2,-3)$ (۰/۵) $\longrightarrow \vec{b} = \vec{c}-\vec{a} = (1,1,7)$ (۰/۲۵) (۰/۵)

(۱۶) $(i+j-k)\times(i-j) = ixi-ixj+jxi-jxj-kxi+kxj = -k-k-j-i$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$= -2k-j-i$ (۰/۲۵)