آزمون درس: هندسه (۳) **پایه: دوازدهم** **رشته: ریاضی و فیزیک**	**به نام آنکه جان را فکرت آموخت** **اداره کل آموزش‌وپرورش استان کهگیلویه و بویراحمد** **معاونت آموزش متوسطه** **آزمون شبه نهایی** **فروردین ماه ۱۴۰۲**	**تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۰۲/۰۴** **مدّت امتحان: ۱۰۰ دقیقه** **ساعت شروع: ۱۰ صبح** **تعداد سؤالات : ۱۴ سؤال**

((الا بذکر الله تطمئن القلوب))- همانا با یاد خداوند دلها آرام می گیرد. | **تعداد صفحات : ۲**

ردیف	((متن سوالات)) نوبت صبح صفحه: ۱	بارم
۱	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. الف) واون هر ماتریس در صورت وجود ..... است. ب)نقطه ی $A(۱ , -۲)$ در ..... دایره به معادله $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ قرار دارد. (داخل/ خارج) ج) در حالتی که خروج از مرکز بیضی ..... باشد، بیضی تبدیل به یک پاره خط می شود. د) اگر سه بردار $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ در یک صفحه باشند، آنگاه حجم متوازی السطوح بنا شده توسط این سه بردار برابر ..... است.	۱
۲	**ماتریس های** $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۳}$ **به صورت های زیر تعریف شده اند. حاصل** $۲A-۳B$ **را بدست آورید.** $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i<j \\ ۱ & i=j \\ j-i & i>j \end{cases} \quad , \quad b_{ij}=Max\{i,j\}$	۱/۲۵
۳	الف) اگر $B=[b_{ij}]_{۳\times۳}$, $b_{ij}=\begin{cases} i+۱ & i=j \\ j-۲ & i<j \\ ۱ & i>j \end{cases}$ ماتریس B را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. ب)ماتریس $B^۲+۳I$ را محاسبه کنید. (I ماتریس همانی مرتبه ۳ است)	۱/۵
۴	الف) اگر $\begin{pmatrix} m & ۰ \\ m-۲ & n \end{pmatrix}$ ماتریس اسکالر باشد، مقادیر m و n را بیابید. ب) دترمینان ماتریس $\begin{pmatrix} -۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & -۲ & ۲ \end{pmatrix}$ را بیابید	۱/۵
۵	دستگاه $\begin{cases} ۲x+y=۴ \\ ۷x+۴y=۱۵ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.	۱/۲۵
۶	معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $o(۲,-۲)$ و بر خط $۴x-۶y+۴=۰$ مماس باشد	۱
۷	وضعیت خط $۴x-۶y=۰$ را نسبت به دایره ی $x^۲+y^۲-۲x=۳$ مشخص کنید	۱/۵

www.kanoon.ir

۸	وضعیت دو دایره ی $x^2+y^2-2x=80$ و $x^2+y^2=4$ را نسبت به هم مشخص کنید.	۱/۵
۹	در نقطه ی $A(3,4)$ روی دایره ی $x^2+y^2-4x-4y-3=0$ مماس بر آن رسم کرده ایم، معادله ی این خط مماس را به دست آورید.	۱
۱۰	حدود k را طوری به دست آورید که $x^2+y^2-12x+16y+k=0$ بتواند معادله یک دایره باشد.	۰/۷۵
۱۱	سهمی به معادله ی $y^2-4y-16y+18=0$ را در نظر بگیرید. الف) معادله متعارف و فاصله کانونی را بیابید ب) مختصات راس، کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.	۱/۵
۱۲	مختصات نقاط برخوردسهمی $y^2+5x+3=0$ و دایره ی $x^2+y^2=36$ را به دست آورید.	۱/۵
۱۳	معادله سهمی $x^2-8=16y+8$ را به حالت استاندارد تبدیل، مختصات کانون و راس آن را تعیین کنید	۱/۵
۱۴	الف) طول بردار $\vec{a}=(2,3,4)$ را به دست آورید. ب) شکل کلی(نمودار) مربوط به روابط $-3\le y\le -2$ و $y\prec -x^2+2$ را در فضای دو بعدی رسم کنید.	۱/۵
۱۵	زاویه ی بین دو بردار $\vec{a}=(2,-1,k)$ و $\vec{b}=(1,0,-1)$ ۴۵ درجه باشد، مقدار k را بیابید.	۱/۵
۱۶	مقدار n را چنان بیابید که دو بردار $\vec{a}=(n,+1,3)$ و $\vec{b}=(1,2n+1,-1)$ بر هم عمود باشند.	۱/۲۵

پیروز و سربلند باشید.

www.kanoon.ir

الف) ماتریسی است چون A^{-1} به طوری که $AxA^{-1}=A^{-1}xA=I$ (منحصر به فرد)

ب) حاصل $O(1,-1)$ $OA=1$ $R=\sqrt{2}$ $\sqrt{2}>1$

ج) نیم

د) صفر

۱-

$$A=\begin{bmatrix}1&3&4\\-1&1&5\\-2&-1&1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&3\\3&3&3\end{bmatrix}$$

$$2A-3B=\begin{bmatrix}2&6&8\\-2&2&10\\-4&-2&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&6&9\\6&6&9\\9&9&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\-8&-4&1\\-13&-11&-7\end{bmatrix}$$

۲- الف)

$$B=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&3&1\\1&1&4\end{bmatrix}$$

ب)

$$B^2=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&3&1\\1&1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&1\\1&3&1\\1&1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&1&6\\6&10&8\\7&7&18\end{bmatrix}$$

$$B^2+4I=\begin{bmatrix}5&1&6\\6&10&8\\7&7&18\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&1&6\\6&14&8\\7&7&22\end{bmatrix}$$

۴- الف)

$m-2=0 \longrightarrow m=2$ $\qquad m=2 \longrightarrow n=2$

ب)

برحسب سطر اول

$$1=(1+0)\times 1^2+(0)\times 2-(0-2)\times 1=-1\begin{vmatrix}1&0\\-2&-1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}0&1\\-1&-2\end{vmatrix}-(2)\begin{vmatrix}0&0\\-1&2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1&0\\-2&2\end{vmatrix}$$

CamScanner

۵-

$$\begin{cases} 2x+y=4 \\ 7x+4y=15 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 8-7=1 \qquad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

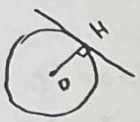
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

۶-

$4x-4y+4=0$ $\qquad OH=R$

$O(2,-2)$



$$OH=\frac{|8+12+4|}{\sqrt{4^2+4^2}}=\frac{24}{\sqrt{32}}=\frac{12}{\sqrt{16}}=\frac{12\sqrt{16}}{16}$$

معادله دایره $\longrightarrow$ $(x-2)^2+(y+2)^2=\frac{144}{16}$

۷-

$x^2+y^2-2x=3$ $\qquad 4x-4y=0$

$O(1,0)$ $\qquad R=2$ $\qquad$ فاصله مرکز تا خط $=\frac{|4|}{\sqrt{4^2+4^2}}=\frac{2\sqrt{16}}{16}$ $\qquad \frac{2\sqrt{16}}{16}<2$ $\qquad$ متقاطع

۸-

$x^2+y^2-2x=80$ $\qquad O_1(1,0)$ $\qquad R_1=9$

$x^2+y^2=4$ $\qquad O_2(0,0)$ $\qquad R_2=2$

$O_1O_2=1$ $\qquad O_1O_2<R_1-R_2 \longrightarrow$ متقاطع

۹-



$x^2+y^2-4x-4y-3=0$

$O(2,2)$ $\qquad H(3,4)$ $\qquad m_{OH}=\frac{4-2}{3-2}=2$

شیب خط $=-\frac{1}{2}$ $\longleftarrow$ شیب عمودمنصف $\times m_{OH}=-1$

معادله عمودمنصف $\longrightarrow (y-4)=-\frac{1}{2}(x-3)$

CamScanner

۱۰-

$a + b - 4c > 0 \longrightarrow (12)^2 + (16)^2 - 4k > 0$

$400 - 4k > 0 \qquad 100 > k$

۱۱- الف)

$y^2 - 4y - 14y + 18 = 0$

$y^2 - 20y + 18 = 0 \qquad y^2 - 20y + 100 - 100 + 18 = 0 \qquad (y-10)^2 - 82 = 0 \qquad (y-10)^2 = 82$

ب)

$x =$ فاصله‌ها $\qquad$ $(10, 0)$ کانون $\qquad$ $(10, 0)$ راس

۱۲-

$y^2 + 8x + 2 = 0 \qquad y^2 = -8x - 2 \qquad F\left(\frac{-2}{20}, 0\right)$

$x^2 + y^2 = 26$

$\Rightarrow x^2 - 8x - 2 = 26 \qquad x^2 - 8x - 28 = 0 \rightarrow \frac{8 + \sqrt{184}}{2}$

$\rightarrow \frac{8 - \sqrt{184}}{2}$ ✓

$y^2 = -8\left(\frac{8 - \sqrt{184}}{2}\right) - 2 = \frac{-28 + 8\sqrt{184} - 4}{2} = \frac{8\sqrt{184} - 32}{2}$

$\left(\frac{8 - \sqrt{184}}{2}, \sqrt{\frac{8\sqrt{184} - 32}{2}}\right)$ و $\left(\frac{8 - \sqrt{184}}{2}, -\sqrt{\frac{8\sqrt{184} - 32}{2}}\right)$

www.kanoon

CamScanner

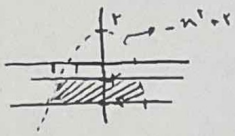
۱۳- $x^2 = 14y + 14 \quad x^2 = 14(y+1) \quad 4a = 14 \rightarrow a = 7$

کانون $(0, 7)$

راس $(0, -1)$

۱۴- الف) $|a| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$

ب)



۱۵- $a = (2, -1, k) \quad b = (1, 0, -1)$

$a \cdot b = (2 + 0 - k) = |a||b| \cos 45 = \sqrt{5+k^2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$2 - k = \sqrt{5+k^2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} k^2 + 4 - 4k = 5 + k^2 \quad -4k = 1 \quad k = -\frac{1}{4}$

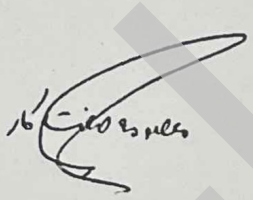
۱۶- آمد و برد اربرگید دیپری دد باگنه ضدب دلغلی آنها صفاست

$a \cdot b = n + 2n + 1 - 4 = 0$

$3n - 2 = 0$

$3n = 2$

$n = \frac{2}{3}$



CamScanner

آزمون شبه نهایی هندسه ۳ (استان کهگیلویه و بویراحمد)

۱- الف) منحصربه‌فرد ب) داخل ج) یک د) صفر

۲- $A=\begin{bmatrix}1&3&4\\-1&1&5\\-2&-1&1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&3\\3&3&3\end{bmatrix}$

$$2A-3B=\begin{bmatrix}2&6&8\\-2&2&10\\-4&-2&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&6&9\\6&6&9\\9&9&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\-8&-4&1\\-13&-11&-7\end{bmatrix}$$

۳- الف)

$$B=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&3&1\\1&1&4\end{bmatrix}$$

ب)

$$B^2=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&3&1\\1&1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&1\\1&3&1\\1&1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&1&6\\6&10&8\\7&7&18\end{bmatrix}$$

$$B^2+3I=\begin{bmatrix}5&1&6\\6&10&8\\7&7&18\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&1&6\\6&13&8\\7&7&21\end{bmatrix}$$

۴- الف) درایه‌های واقع بر قطر یک ماتریس اسکالر برابر یکدیگرند و درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی چنین ماتریسی برابر صفرهستند، پس داریم:

$$\begin{bmatrix}m&0\\m-2&n\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}m-2=0\Rightarrow m=2\\m=n\xrightarrow{m=2}n=2\end{cases}$$

ب) با استفاده از بسط برحسب سطر دوم ماتریس داریم:

$$|A|=1\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-1&3\\-1&2\end{vmatrix}=1$$

۵- $A=\begin{bmatrix}2&1\\7&4\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2\times4-1\times7}\begin{bmatrix}4&-1\\-7&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-1\\-7&2\end{bmatrix}$

$$X=A^{-1}B\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-1\\-7&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$$

www.kanoon.ir

۶- فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس بر دایره، برابر اندازهٔ شعاع دایره است.

$$R = \frac{|۴(۲)-۶(-۲)+۴|}{\sqrt{۴^۲+(-۶)^۲}} = \frac{۲۴}{۲\sqrt{۱۳}} = \frac{۱۲}{\sqrt{۱۳}}$$

معادلهٔ دایره : $(x-۲)^۲+(y+۲)^۲ = \frac{۱۴۴}{۱۳}$

۷- فاصلهٔ مرکز دایره از خط و نیز اندازهٔ شعاع دایره را محاسبه کرده و با هم مقایسه می‌کنیم :

$$x^۲+y^۲-۲x-۳=۰$$

مرکز دایره : $O(۱,۰)$ ، شعاع دایره : $R = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲-۴(-۳)} = ۲$

فاصلهٔ مرکز دایره از خط : $d = \frac{|۴(۱)-۶(۰)|}{\sqrt{۴^۲+(-۶)^۲}} = \frac{۴}{۲\sqrt{۱۳}} = \frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$

$$\frac{۲}{\sqrt{۱۳}} < ۲ \Rightarrow d < R \Rightarrow$$ خط و دایره در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند

۸-

$$C: x^۲+y^۲-۲x-۸۰=۰$$

مرکز : $O(۱,۰)$ ، شعاع : $R = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲-۴(-۸۰)} = ۹$

$$C': x^۲+y^۲=۴$$

مرکز $O'(۰,۰)$ ، شعاع : $R' = ۲$

$$OO' = \sqrt{(۰-۱)^۲+(۰-۰)^۲} = ۱$$

$$۱ < ۹-۲ \Rightarrow OO' < |R-R'| \Rightarrow$$ دو دایره متداخل‌اند

۹- خط مماس بر دایره در نقطهٔ تماس بر شعاع گذرنده از آن نقطه عمود است.

اگر مرکز دایره را با O و خط مماس را با d نمایش دهیم، آنگاه داریم :

$$x^۲+y^۲-۴x-۴y-۳=۰ \Rightarrow O(۲,۲)$$

$$m_{OA} = \frac{y_A-y_O}{x_A-x_O} = \frac{۴-۲}{۳-۲} = ۲ \Rightarrow m_d = -\frac{۱}{۲}$$

معادلهٔ خط مماس : $y-۴ = -\frac{۱}{۲}(x-۳) \xrightarrow{\times ۲} ۲y-۸ = -x+۳$

$$\Rightarrow x+۲y = ۱۱$$

www-kanoon-ir

۱۰- شرط دایره بودن : $a^2+b^2-4c>0 \Rightarrow (-12)^2+16^2-4k>0$

$\Rightarrow 144+256>4k \Rightarrow 4k<400 \Rightarrow k<100$

۱۱- الف)

$y^2-4y-16x+18=0 \Rightarrow y^2-4y=16x-18$

$\xrightarrow{+4} y^2-4y+4=16x-14 \Rightarrow (y-2)^2=16\left(x-\frac{7}{8}\right)$

$4a=4 \Rightarrow a=1$: فاصله کانونی

ب) رأس : $A\left(\frac{7}{8}, 2\right)$

سهمی رو به راست باز می‌شود، بنابراین داریم :

کانون : $F(h+a,k)=\left(\frac{7}{8}+1, 2\right)=\left(\frac{15}{8}, 2\right)$

خط هادی : $x=h-a=\frac{7}{8}-1 \Rightarrow x=\frac{-1}{8}$

۱۲-

$x^2+y^2=36 \Rightarrow y^2=36-x^2$

$y^2+5x+3=0 \Longrightarrow 36-x^2+5x+3=0$

$\Rightarrow x^2-5x-39=0$

$\Delta=(-5)^2-4(-39)=181 \Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{181}}{2}$

چون نقطهٔ $A\left(-\frac{3}{5}, 0\right)$ رأس سهمی است و سهمی رو به چپ باز می‌شود، پس تنها مقدار $x=\frac{5-\sqrt{181}}{2}$ قابل قبول است.

$y^2=36-\left(\frac{5-\sqrt{181}}{2}\right)^2=36-\frac{209-10\sqrt{181}}{4}$

$\Rightarrow y^2=\frac{10\sqrt{181}-62}{4}$

۱۳-

$x^2-8=16y+8 \Rightarrow x^2=16y+16$

$\Rightarrow x^2=16(y+1)$

رأس: $A(0,-1)$, $4a=16 \Rightarrow a=4$

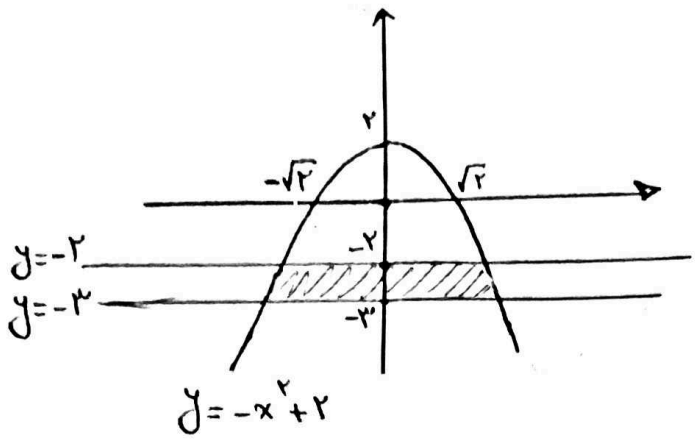
سهمی رو به بالا باز می‌شود، پس داریم :

کانون : $F(h,k+a)=(0,-1+4) \Rightarrow F(0,3)$

www-kanoon-ir

۱۴- الف)
$$|\vec{a}| = \sqrt{۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۲۹}$$

ب) ناحیه‌ها شور خورده در شکل، معادل رابطه‌ی داده شده است.



۱۵-
$$\cos ۴۵^\circ = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲+۰-k}{\sqrt{۴+۱+k^۲}\times\sqrt{۱+۰+۱}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲-k}{\sqrt{۵+k^۲}\times\sqrt{۲}} \Rightarrow ۲\sqrt{۵+k^۲} = ۲(۲-k)$$

$$\Rightarrow \sqrt{۵+k^۲} = ۲-k \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۵+k^۲ = ۴-۴k+k^۲$$

$$\Rightarrow ۴k = -۱ \Rightarrow k = -\frac{۱}{۴}$$

۱۶-
$$\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = ۰ \Rightarrow n+۲n+۱-۳ = ۰$$

$$\Rightarrow ۳n = ۲ \Rightarrow n = \frac{۲}{۳}$$