هندسه ۳ (پایهٔ دوازدهم رشتهٔ ریاضی)

۱ الف)

$$\begin{bmatrix} -۱ & -۳ & ۵ \\ ۰ & -۲ & -۴ \\ ۱ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} -۱ & -۳ & -۵ \\ ۰ & -۲ & -۴ \\ ۱ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & -۱ \\ ۱ & ۴ & ۰ \\ -۲ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & -۱۵ & ۱۶ \\ ۶ & -۸ & ۱۲ \\ ۷ & -۱ & ۸ \end{bmatrix}$$

ب)

$$A+B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۶ \\ ۱ & ۲ & -۴ \\ -۱ & -۱ & -۶ \end{bmatrix}$$

$$|A+B|=(-۱۶)-۶(۱)=-۲۲$$

۲

$$a(۳)+۳(۲)=۲\to a=-\frac{۴}{۳}$$
$$۲(۳)+b(۲)=۱\to b=-\frac{۵}{۲}$$

$$A=\begin{bmatrix} -\frac{۴}{۳} & ۳ \\ ۲ & -\frac{۵}{۲} \end{bmatrix}$$

$$|A|=\frac{۱۰}{۳}-۶=-\frac{۸}{۳}$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{-\frac{۸}{۳}}\begin{bmatrix} -\frac{۵}{۲} & -۳ \\ -۲ & -\frac{۴}{۳} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱۵}{۸} & \frac{۹}{۸} \\ \frac{۳}{۴} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

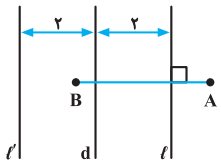
۳

$$A=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۴^۳$$

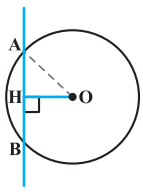
$$|۲A^{-۱}|=۲^۳\frac{۱}{|A|}=۸\times\frac{۱}{۶۴}=\frac{۱}{۸}$$

۴ الف) ۱) درست ۲) درست

ب) عمودمنصف B و A بر یکی از دو خط موازی ℓ و ℓ' منطبق باشد، نقاطی که از A و B به یک فاصله باشند عمودمنصف پاره‌خط AB است. نقاطی که از خط ℓ به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر باشد دو خط موازی ℓ و ℓ' است.



۵



$$AH=HB=\frac{۱}{۲}AB=۲$$

$$OH=\frac{|۲-۰|}{\sqrt{۱+۰}}=۲$$

$$\overset{\Delta}{OHA}: OH^۲+AH^۲=OA^۲$$

$$\to OA^۲=۴+۴=۸$$

$$\to OA=۲\sqrt{۲}$$

$$(x-۲)^۲+(y-۳)^۲=۸$$

$$\xrightarrow[x=۰]{\text{محور y}}۲^۲+(y-۳)^۲=۸\to(y-۳)^۲=۴$$

$$\to y-۳=\pm۲\to\begin{cases} y=۵ \\ y=۱ \end{cases}\to (۰,۱),(۰,۵)$$

۶

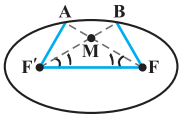
$$M(۲,۳),\ ۲a=۱۰$$

$$MF+MF'=\sqrt{۱+۹}+\sqrt{۲۵+۹}<۱۰$$

$MF+MF'<۲a\to$ M داخل بیضی قرار دارد.

۷ نقاط A و B روی بیضی قرار دارند بنا به تعریف بیضی داریم:

$$\left.\begin{matrix} AF+AF'=۲a \\ BF+BF'=۲a \end{matrix}\right\}\to AF+AF'=BF+BF'\to AF=BF'$$



دو مثلث $\overset{\Delta}{AFF'}$ و $\overset{\Delta}{BFF'}$ بنا به تساوی سه ضلع همنهشت هستند.

$$(AF'=BF,\ FF'=FF',\ AF=BF')\to \hat{F}_۱=\hat{F}_۱'$$

مثلث $\overset{\Delta}{FMF'}$ متساوی‌الساقین است. $MF=MF'$

پس M روی عمودمنصف FF' یعنی قطر کوچک بیضی قرار دارد.

۸ الف)

$$(y+۲)^۲=۸(x+۲)$$

رأس سهمی $(-۲,-۲)$ و فاصلهٔ کانونی $a=۲$ سهمی افقی رو به راست است.

مختصات کانون سهمی برابر با: $F=(-۲+۲,-۲)=(۰,۲)$

و معادلهٔ خط هادی سهمی برابر است با: $x=-۲-۲=-۴$

ب)

$$\begin{cases} (y+۲)^۲=۸(x+۲) \\ x^۲+(y+۲)^۲=۴ \end{cases}\to ۴-x^۲=۸x+۱۶$$

$$\to x^۲+۸x+۱۲=۰$$

$$(x+۶)(x+۲)=۰\to\begin{cases} x=-۶ \\ x=-۲ \end{cases}$$

$x=-۶\to$ غ‌ق‌ق

$$x=-۲\to(y+۲)^۲=۰\to y=-۲\to(-۲,-۲)$$

۹ الف)

$$A=(۲,۳,۴)\xrightarrow{\text{تصویر}}A'(۲,۳,۲)$$

ب)

$$A=(۲,۳,۴)\xrightarrow[Z=۰]{\text{قرینه}}A''(۲,۳,-۴)$$

پ)

$$AB\text{ یال }\begin{cases} x=۲ \\ y=۳ \\ ۰\le z\le ۴ \end{cases}$$

ت)

$$ABCD\text{ وجه }\begin{cases} ۰\le x\le ۲ \\ y=۳ \\ ۰\le z\le ۴ \end{cases}$$

۱۰

$$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|\to\vec{a}\perp\vec{b}\to\vec{a}.\vec{b}=۰$$

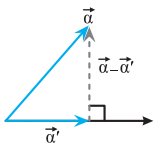
$$\vec{a}.\vec{b}=(۲,m-۱,۳).(m-۲,۰,۱)=۲m-۴+۳=۰\to m=\frac{۱}{۲}$$

$$\vec{a}=(۲,-\frac{۱}{۲},۳),\vec{b}=(-\frac{۳}{۲},۰,۱)$$

$$\vec{a}+\vec{b}=(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲},۴)\to|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}+۱۶}=\sqrt{\frac{۶۶}{۴}}=\frac{\sqrt{۶۶}}{۲}$$

۱۱ بردار $\vec{a}'$ موازی بردار $\vec{b}$ است.

$$\vec{a}'=K\vec{b}\qquad (۱)$$



بردار $\vec{a}-\vec{a}'$ بر بردار $\vec{b}$ عمود است.

$$\vec{b}\ \ (\vec{a}-\vec{a}')\perp\vec{b}\to(\vec{a}-\vec{a}').\vec{b}=۰$$

$$\xrightarrow{\vec{a}'=K\vec{b}}\vec{a}.\vec{b}-K\vec{b}.\vec{b}\to=۰\to K=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\qquad (۲)$$

با جایگذاری رابطهٔ (۲) در رابطهٔ (۱) داریم:

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}.\vec{b}$$

۱۲

$$\vec{a}=(-۱,۰,-۱),\ \vec{b}=(۱,-۱,۱)\qquad \vec{a}\times\vec{b}=(-۱,۰,۱)$$

$$\cos\alpha=\frac{(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{i}}{|a||i|}=-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\to\alpha=۱۳۵^\circ$$

ب)

$$S=|(\vec{a}+\vec{b})\times۲\vec{b}|=|۲\vec{a}\times\vec{b}+۲\vec{b}\times\vec{b}|=۲|\vec{a}\times\vec{b}|$$

$$=۲\sqrt{۱+۰+۱}=۲\sqrt{۲}$$

۱۳

$$\text{حجم متوازی‌السطوح}=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=|(m,۱,۲),(۱,۲,۱)|$$

$$=|m+۲+۲|=۱۰$$

$$\begin{cases} m=۶ & \checkmark \\ m=-۱۴ & \times \end{cases}$$

$$\text{طول ارتفاع}=\frac{\text{حجم متوازی‌السطوح}}{\text{مساحت متوازی‌الاضلاع c و b}}=\frac{۱۰}{|\vec{b}\times\vec{c}|}$$

$$=\frac{۱۰}{\sqrt{۶}}=\frac{۱۰\sqrt{۶}}{۶}$$

www.kanoon.ir

هندسه ۳ (پایهٔ دوازدهم رشتهٔ ریاضی)

اسحاق اسفندیار

۱| ماتریس $A=[i-2j]_{3\times 3}$ و ماتریس $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 4 & 0\\ -2 & 0 & -3\end{bmatrix}$ در نظر بگیرید.

الف) حاصل $A\times B$ را به‌دست آورید.

ب) دترمینان $A+B$ را به‌دست آورید.

۲| اگر جواب دستگاه $\begin{cases}ax+3y=2\\ 2x+by=1\end{cases}$ معادلات خطی به‌صورت $(3,2)$ باشند، وارون ماتریس ضرایب را به‌دست آورید.

۳| اگر A یک ماتریس اسکالر مرتبهٔ ۳ باشد به‌طوریکه آخرین درایهٔ آن ۴ باشد، آنگاه حاصل دترمینان $(2A^{-1})$ را به‌دست آورید.

۴| الف) عبارت درست و نادرست را مشخص کنید.

۱) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع به یک فاصله باشند نیمسازهای ۲ خط متقاطع است.

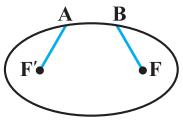
۲) اگر صفحه‌ای موازی محور سطح مخروطی آن را قطع کند، سطح مقطع حاصل یک هذلولی است.

ب) دو نقطهٔ A و B خارج خط d مفروضند. نقطه‌ای که از A و B به یک فاصله و از خط d به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر است، در کدام حالت مسأله بی‌شمار جواب دارد. (با رسم یک شکل حالت را مشخص کنید.)

۵| دایره‌ای به مرکز $(2,3)$ روی محور yها وتری به طول ۴ جدا می‌کند. معادلهٔ این دایره را بنویسید و نقاط برخورد دایره با محور yها را بیابید.

۶| کانون‌های یک بیضی $(3,0)$ و $(-3,0)$ و طول قطر بزرگ بیضی ۱۰ است. وضعیت نقطهٔ $(2,3)$ نسبت به این بیضی چگونه است؟ (داخل- خارج - روی بیضی)

۷| دو نقطهٔ A و B روی بیضی و F و F' کانون‌های بیضی‌اند به‌طوری‌که A به کانون F' نزدیک‌تر و B به کانون F نزدیک‌تر است. اگر $AF'=BF$ باشد و AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، نشان دهید مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.



۸| سهمی به معادلهٔ $y^2-8x+4y=12$ مفروض است.

الف) مختصات کانون و معادلهٔ خط هادی سهمی را به‌دست آورید.

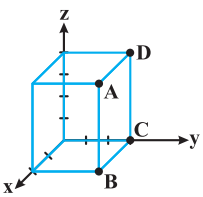
ب) نقاط برخورد سهمی با دایره $x^2+(y+2)^2=4$ را بیابید.

۹| الف) تصویر قائم نقطهٔ A روی صفحهٔ $Z=2$ را بیابید.

ب) قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به صفحهٔ $Z=0$ را بیابید.

پ) معادلهٔ یال (پاره‌خط) AB را بنویسید.

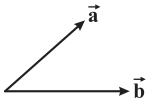
ت) معادلهٔ وجهٔ $ABCD$ را بنویسید.



۱۰| دو بردار $\vec{a}=(2,m-1,3)$ و $\vec{b}=(m-2,0,1)$ را در نظر بگیرید. اگر اندازهٔ دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ با هم برابر باشد.

طول بردار $(\vec{a}+\vec{b})$ را بیابید.

۱۱| اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار مطابق شکل باشند و $\vec{a}'$ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی $\vec{b}$ باشد، ثابت کنید: $\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$



۱۲| دو بردار $\vec{a}=-\vec{i}-\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{k}-\vec{j}+\vec{i}$ مفروضند.

الف) زاویهٔ بین بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ با محور xها را بیابید.

ب) مساحت متوازی‌الاضلاع که توسط بردارهای $\vec{a}+\vec{b}$ و $2\vec{b}$ بنا شده را بیابید.

۱۳| اگر حجم متوازی‌السطوح که توسط سه بردار $\vec{a}=(m,1,2)$ و $\vec{b}=(1,-1,1)$ و $\vec{c}=(0,1,-2)$ برابر با ۱۰ باشد. طول ارتفاع وارد بر وجه شامل دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را بیابید. $(m>0)$