باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : **هندسه ۳**	تعداد صفحه: **۳**	تاریخ امتحان: **۱۴۰۱/۳/۴**	ساعت شروع: **۸ صبح**
پایه: **دوازدهم** دوره دوم متوسطه	رشته : **ریاضی فیزیک**	مدت امتحان : **۱۳۵** دقیقه	نام و نام خانوادگی :
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت **خرداد** ماه سال **۱۴۰۱**		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://acc.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	برای دو ماتریس وارون پذیر و دلخواه A و B ثابت کنید: $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$	۱
۲	ماتریس ۳×۳ بیابید که در معادله $2\|A\|^2 + 3\|A\| - 2 = 0$ صدق کند.	۱
۳	روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های دستگاه زیر بحث کنید. در صورت وجود، جواب دستگاه را با استفاده از ماتریس وارون بیابید. $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$	۱/۵
۴	ثابت کنید وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر به فرد است.	۱
۵	اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد مقدار $A^2 - 4A^{-2} - 5I_2$ را محاسبه کنید.	۱/۵
۶	مکان هندسی نقاطی را بیابید که از آن‌ها بر دایره C(O,R) دو مماس عمود بر هم رسم شود.	۰/۷۵
۷	مقدار m را بیابید که خط $2x + my = 3$ بر دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ عمود باشد.	۱/۲۵
۸	به ازای چه مقادیری از m معادله $x^2 + y^2 - 2x + 6y + m = 2$ نمایش یک دایره است؟	۱
۹	در یک بیضی F و F′ کانون‌ها B و B′ راس‌های قطر کوچک هستند اگر مساحت و محیط چهار ضلعی BFB'F' به ترتیب ۴۸ و $8\sqrt{10}$ باشد، خروج از مرکز بیضی را حساب کنید.	۱/۲۵
۱۰	فاصله دورترین و نزدیک‌ترین نقاط بیضی از کانون‌های آن به ترتیب ۱۲ و ۴ می‌باشد. اندازه قطرهای بیضی را حساب کنید.	۱
۱۱	نقطه M روی بیضی به قطرهای ۶ و ۱۰ طوری قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی ۴ می‌باشد. اگر F و F′ مراکز کانون بیضی باشد، طول‌های MF و MF′ را حساب کنید.	۱/۲۵
۱۲	معادله مکان هندسی نقاطی که از خط $y = 4$ و نقطه A(۵ و۲) به یک فاصله باشند را بیابید.	۱/۲۵
۱۳	خط هادی و کانون و مختصات راس سهمی $x^2 + 4x + 4y + 28 = 0$ را به دست آورید و سپس آن را رسم کنید.	۱/۲۵
۱۴	نقاط A(۱و۲و۱) و B(۳و۳و۳) و C(۱و۵و۴) سه راس مثلث ABC هستند. طول میانه AM و محیط مثلث را محاسبه کنید.	۱/۲۵

۱۵	اگر $\vec{a}$=(۱و۰و۲-) و $\vec{b}$=(۰و۱و۱-) باشد: الف) زاویه بین دو بردار را بیابید. ب) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را روی امتداد بردار $\vec{b}$ بیابید.	۱
۱۶	بردارهای a=(۳و۱-و۱) و b=(۰و۴و۶) و c=(۱و۱و۲) مفروض هستند. الف) قرینه بردار a را نسبت به امتداد بردار b - c پیدا کنید. ب) حجم متوازی‌السطوح تولید شده توسط سه بردار a و b و c را محاسبه کنید.	۱/۷۵
۱۷	بردارهای $a = i + 2j + k$ ، $b = 2i - j + 3k$ و $c = i + mj - k$ مفروض‌اند. مقدار m را چنان بیابید که سه بردار هم صفحه باشند.	۱
	موفق باشید	

دقیقا یک سکه رو ظاهر شود، چقدر است؟

پاسخنامه هندسه

۱	$(۱)A\times B\times B^{-۱}\times A^{-۱}=A\times(BB^{-۱})A^{-۱}=AA^{-۱}=I$ $(۲)B^{-۱}A^{-۱}AB=B^{-۱}(A^{-۱}A)B=B^{-۱}B=I$ پس دو ماتریس $A\times B$، $B^{-۱}\times A^{-۱}$ معکوس هم هستند. یعنی $(A\times B)^{-۱}=B^{-۱}\times A^{-۱}$	۱
۱	$۲|A|^{۲}+۳|A|-۲=۰$ $|A|=\frac{-۳\pm\sqrt{۹-۴\times۲(-۲)}}{۴}=\frac{-۳\pm۵}{۴}\Rightarrow|A|=-۲,\frac{۱}{۲}$ می‌توان دو ماتریس زیر را معرفی کرد که پاسخ آن $|A|=-۲,\frac{۱}{۲}$ باشد. $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & -۴\\ ۰ & -۱ & ۳\\ ۰ & ۰ & -۲\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=-۱\times-۱\times-۲=-۲$ $A=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۶} & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=\frac{۱}{۶}\times۳\times۱=\frac{۱}{۲}$	۲

۳	با توجه به اینکه دستگاه دارای شرط داشتن جواب $(\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d})$ است، به سراغ حل آن می‌رویم.	۱/۵
	$\begin{bmatrix}۳ & ۵\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۵\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}$	
	$\lvert A\rvert=-۳-۵=-۸\Rightarrow A^{-۱}=\frac{-۱}{۸}\begin{bmatrix}-۱ & -۵\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}$	
	$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=-\frac{۱}{۸}\begin{bmatrix}-۱ & -۵\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}=-\frac{۱}{۸}\begin{bmatrix}-۱۱\\ ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱۱}{۸}\\ -\frac{۵}{۸}\end{bmatrix}$	
	$\Rightarrow x=\frac{۱۱}{۸},y=-\frac{۵}{۸}$	
۴	فرض می‌کنیم که B و C هر دو وارون A باشند. ثابت می‌کنیم که $B=C$ فرض $\begin{cases}AB=BA=I\\ AC=CA=I\end{cases}$	۱
	$B=IB=(CA)B=C(AB)=CI=C\Rightarrow B=C$	
۵	$B=A^{-۱}=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & -۴\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$	۱/۵
	$,B^{-۳}=(A^{-۱})^{-۳}=A^{۳}$	
	$\lvert B\rvert=۱\times۱-۰\times(-۴)=۱\Rightarrow B^{-۳}=\frac{۱}{۱}\times\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$	
	$A^{۲}-۴A^{-۳}۵I=\begin{bmatrix}۱ & -۴\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴ & -۱۶\\ ۰ & ۴\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۵ & ۰\\ ۰ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۸ & ۱۲\\ ۰ & -۸\end{bmatrix}$	
۶	مطابق شکل مماس‌های رسم شده از M بر هم عمودند $(M=۹۰^{\circ})$ و شعاع در نقطه تماس بر مماس عمود است. $(T=T'=۹۰^{\circ})$ مماس رسم شده از M برابرند یعنی $MT=MT'$ پس می‌توان نتیجه گرفت که $MTOT'$ مربع می‌باشد. داریم: $MT=MT'=OT=OT'=R\Rightarrow OM=\sqrt{۲}R$ پس مکان هندسی M دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{۲}R$ می‌باشد.	۰/۷۵
۷	خطی که بر دایره‌ای عمود باشد، از مرکز دایره می‌گذرد.	۱/۲۵
	$x^{۲}+y^{۲}-۲x+۴y+۴=۰$	
	$\Rightarrow(x-۱)^{۲}+(y+۲)^{۲}-۱-۴+۴=۰$	
	$(x-۱)^{۲}+(y+۲)^{۲}=۱,O=(۱,-۲),r=۱$	
	$\Rightarrow۲\times۱+m\times(-۲)=۳\Rightarrow-۲m=۱\Rightarrow m=-\frac{۱}{۲}$	

۸	معادله ضمنی، زمانی نمایش دایره است که داشته باشیم:	۱
	$x^2+y^2+ax+by+c=0 : a^2+b^2>4c$	
	$(-2)^2+6^2>4\times(m-2)\Rightarrow 40>4m-8\Rightarrow m<12$	
۹	$S_{min}=4b\times c=48$	۱/۲۵
	$BFB'F'$ محیط $=4BF=4a=8\sqrt{10}$	
	$BF^2=b^2+c^2=a^2$	
	$\Rightarrow\begin{cases}bc=12\\a=2\sqrt{10}=\sqrt{b^2+c^2}\Rightarrow b^2+c^2=40\end{cases}$	
	$\Rightarrow\begin{cases}bc=12\\b^2+c^2=40=(b+c)^2-2bc=40\end{cases}$	
	$\Rightarrow (b+c)^2-2\times12=40$	
	$(b+c)^2=64\Rightarrow b+c=8$	
	$\Rightarrow\begin{cases}bc=12\\b+c=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=6\\c=2\end{cases}$	
	خروج از مرکز $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$	
۱۰	دورترین فاصله $A'F=AA'-AF=2a-(a-c)=a+c$	۱
	نزدیک‌ترین فاصله $A'F'=a-c$	
	$\Rightarrow\begin{cases}a+c=12\\a-c=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=8\\c=4\end{cases}$	
	$\Rightarrow b^2=a^2-c^2=64-16=48\Rightarrow b=\sqrt{48}$	
	قطرها : $2a-16, 2b-2\sqrt{48}$	
۱۱	$\begin{cases}2a=10\Rightarrow a=5\\2b=6\Rightarrow b=3\end{cases}$	۱/۲۵
	$c^2=a^2-b^2=4^2\Rightarrow c=4$	
	در مثلث MFF' داریم که OM میانه وارد بر FF' و نصف آن است. $2c=8$ پس $FMF'=90^\circ$ می‌باشد. داریم:	
	$\begin{cases}x+y=2a=10\\x^2+y^2=FF'=64\end{cases}$	
	$\Rightarrow (x+y)^2-2xy=64\Rightarrow 100-2xy=64\Rightarrow xy=18$	
	$\Rightarrow\begin{cases}x+y=10\\xy=18\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=10-x\\xy=18\end{cases}$	
	$\Rightarrow x(10-x)=18\Rightarrow 10x-x^2-18=0$	
	$x^2-10x+18=0$	
	$x=\frac{10\pm\sqrt{100-4\times18}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{28}}{2}=\frac{10\pm2\sqrt{7}}{2}=5\pm\sqrt{7}$	
	$x=5+\sqrt{7}, y=5-\sqrt{7}\ /\ x=5-\sqrt{7}, y=5+\sqrt{7}$	

۱۲	اگر $M(x,y)$ نقطه مورد نظر باشد داریم:	۱/۲۵
	$MH=\frac{\lvert y-۴\rvert}{\sqrt{۱}}=\lvert y-۴\rvert, MA=\sqrt{(x-۲)^۲+(y-۵)^۲}$	
	$MH=MA\Rightarrow (y-۴)^۲=(x-۲)^۲+(y-۵)^۲$	
	$\Rightarrow y^۲-۸y+۱۶=x^۲-۴x+۴+y^۲-۱۰y+۲۵$	
	مکان هندسی نقاط موردنظر سهمی به معادله:	
	$(x-۲)^۲=۲y-۹\Rightarrow (x-۲)^۲=۲(y-\frac{۹}{۲})$	
۱۳	$x^۲+۴x+۴y+۲۸=۰\Rightarrow (x+۲)^۲-۴+۴y+۲۸=۰$	۱/۲۵
	$(x+۲)^۲=-۴y-۲۴\Rightarrow (x+۲)^۲=-۴(y+۶)$	
	راس سهمی $S(-۲,-۶), -۴a=-۴\Rightarrow a=۱$	
	کانون: $F=(۰,-۲,-۱,-۶)=(-۲,-۷)$	
	خط هادی $y=-۱-۶=-۵$	
۱۴	BC وسط $M\begin{cases} x_M=\frac{x_B+x_C}{۲} \\ y_M=\frac{y_B+y_C}{۲}\Rightarrow \begin{vmatrix}\frac{۳+۱}{۲}=۲\\ \frac{۵+۱}{۲}=۳\\ \frac{۳+۴}{۲}=\frac{۷}{۲}\end{vmatrix} \\ z_M=\frac{z_B+z_C}{۲}\end{cases}$	۱/۲۵
	$AM=\sqrt{(۲-۱)^۲+(۳-۲)^۲+(\frac{۷}{۲}-۱)^۲}$	
	$=\sqrt{۱+۱+\frac{۲۵}{۴}}=\frac{\sqrt{۳۳}}{۲}$	
	$AB=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۲-۱)^۲+(۳-۱)^۲}=\sqrt{۴+۱+۴}=۳$	
	$AC=\sqrt{(۱-۱)^۲+(۵-۲)^۲+(۴-۱)^۲}=\sqrt{۰+۹+۹}=۳\sqrt{۲}$	
	$BC=\sqrt{(۳-۱)^۲(۵-۱)^۲+(۴-۳)^۲}$	
	$=\sqrt{۴+۱۶+۱}=\sqrt{۲۱}$	
	محیط $ABC=۳+۳\sqrt{۲}+\sqrt{۲۱}$	

۱	۱۵ الف) $\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\times\cos\theta\Rightarrow\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$ $\cos\theta=\frac{(-۲,۰,۱).(-۱,۱,۰)}{\sqrt{(-۲)^۲+۰^۲+۱^۲}\times\sqrt{(-۱)^۲+۱^۲+۰^۲}}$ $=\frac{۲+۰+۰}{\sqrt{۵}\times\sqrt{۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۱۰}}$ ب) $a'=\frac{a.b}{\|\vec{b}\|^۲}\vec{b}\Rightarrow a'=\frac{۲}{۲}(-۱,۱,۰)=(-۱,۱,۰)$	
۱/۷۵	۱۶ الف) $\vec{b}-\vec{c}=(۶,۴,۰)-(۲,۱,۱)=(۴,۳,-۱)$ $\vec{a}.(\vec{b}-\vec{c})=(۱,-۱,۳).(۴,۳,۰۱)=۱\times۴-۱\times۳-۱\times۳=-۲$ $\|\vec{b}-\vec{c}\|^۲=۴^۲+۳^۲+(-۱)^۲=۲۶$ $\Rightarrow a''=\frac{۲\vec{a}.(\vec{b}-\vec{c})}{\|\vec{b}-\vec{c}\|}(\vec{b}-\vec{c})-\vec{a}$ $\Rightarrow a''=\frac{۲\times(-۲)}{۲۶}(۴,۳,-۱)-(۱,-۱,۳)$ $a''=(\frac{-۸}{۱۳},\frac{-۶}{۱۳},\frac{۲}{۱۳})-(۱,-۱,۳)=(\frac{-۲۱}{۱۳},\frac{۷}{۱۳},\frac{-۳۷}{۱۳})$ ب) $\|\vec{v}\|=\|a.(b\times c)\|$ $\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ ۶ & ۴ & ۰\\ ۲ & ۱ & ۱\end{vmatrix}=۴i-۶j-۲k\Rightarrow\vec{b}\times\vec{c}=(۴,-۶,-۲)$ $\|\vec{v}\|=\|a.(b\times c)\|=\|(۱,-۱,۳).(۴,-۶,-۲)\|=۴+۶-۶=۴$	
۱	۱۷ شرط این که سه بردار a و b و c روی یک صفحه باشند این است که $\|a.(\vec{b}\times\vec{c})\|=۰$ باشد. داریم: $b\times c=\begin{vmatrix}i & j & k\\ ۲ & -۱ & ۳\\ ۱ & m & -۱\end{vmatrix}=(۱-۳m)i+۵j+(۲m+۱)k$ $a.(b\times c)=(۱,۲,۱).(۱-۳m,۵,۲m+۱)=۰$ $\Rightarrow ۱-۳m+۱۰+۲m+۱=۰\Rightarrow -m+۱۲=۰$ $\Rightarrow m=۱۲$	
	موفق باشید	