نام:
نام خانوادگی:
شماره:
کلاس: رشته:

به نام خداوند جان و خرد

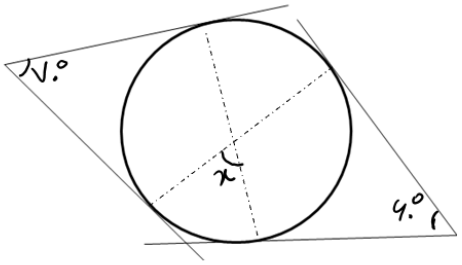
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان
دبیرستان علامه حلی (۷) تهران

تاریخ: ۱۴۰۲/۱۰/۴
درس: هندسه ۲
نام دبیر : آقای قربانی
زمان: ۱۱۰ دقیقه

۱- دو دایره متقاطع را تعریف کنید . (با رسم شکل) (۰/۵ نمره)

۲- قضیه : ثابت کنید اندازه هر زاویه ظلی برابر با نصف کمان رو به رو به آن است . (۱ نمره)

۳- در شکل زیر x را بیابید . (خطوط مماس اند) (۱ نمره)



۴- درستی یا نادرستی هر یک از گزاره های زیر را با ذکر دلیل کامل مشخص کنید . (۳ نمره)

الف) اگر دو دایره $C, \acute{C}$ دارای ۲ مماس مشترک خارجی و یک مماس مشترک داخلی باشند آنگاه متقاطع اند .

ب) اگر فاصله نقطه A تا نزدیک ترین نقطه دایره $C(O,3)$ برابر ۷ باشد آنگاه A درون دایره است .

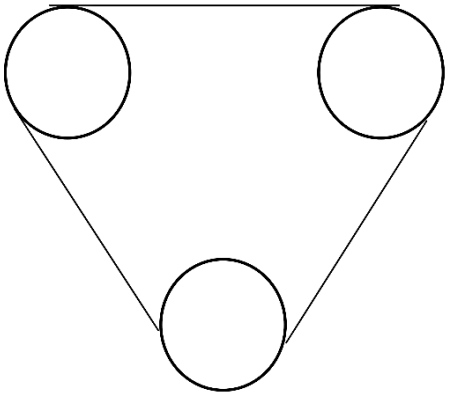
ج) کمان های بین خط مماس بر دایره و وتری موازی با آن با یکدیگر برابرند .

د) در دایره ای به شعاع ۲ مساحت قطعه ایجاد شده توسط کمانی به زاویه ۳۰ درجه برابر با $\frac{\pi}{۲}$ است .

و) ذوزنقه متساوی الاساقین یک چهارضلعی محاطی است .

ی) اگر شعاع دایره محاطی داخلی یک چند ضلعی محیطی برابر ۱۰ و مساحت ۲۰ باشد محیط آن ۲ می باشد .

۵- در شکل زیر ، سه دایره به شعاع های برابر ۲ می باشند . این سه دایره به وسیله نخی بسته شده اند . اگر فاصله دو به دو مرکز ها 6π باشد ، طول نخ کدام است ؟ (۱ نمره)



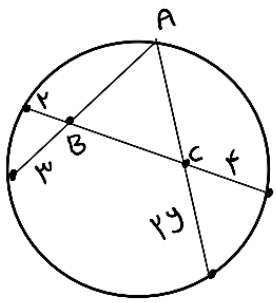
www.kanoon.ir

به نام خداوند جان و خرد

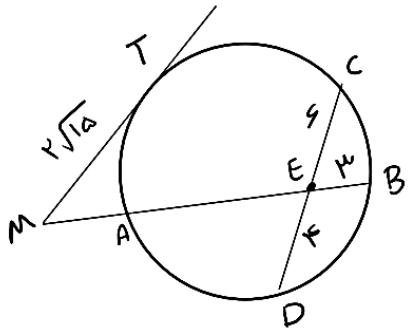
نام:
نام خانوادگی:
شماره:
کلاس: رشته:

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان
دبیرستان علامه حلی (۷) تهران

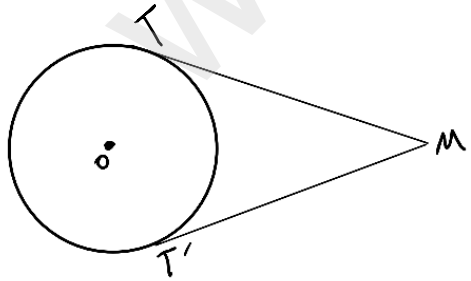
۶- الف) در شکل زیر ABC مثلث متساوی الاضلاع است . طول ضلع مثلث ABC و اندازه y کدام است ؟ (۰/۷۵ نمره)



ب) در شکل زیر در شکل زیر ME چقدر است ؟ (MT مماس است .) (۰/۷۵ نمره)



۷-الف) اگر از نقطه M ، بیرون دایره $C(O.R)$ دو مماس MT و $M\acute{T}$ را رسم کنیم ، ثابت کنید : $MT = M\acute{T}$.
(۰/۵ نمره)



ب) در شکل مورد الف اگر $\hat{M} = ۶۰^\circ$ و شعاع دایره ۶ باشد طول مماس MT چقدر است ؟ (۰/۵ نمره)

www-kanoon-ir

به نام خداوند جان و خرد

نام:
نام خانوادگی:
شماره:
کلاس: رشته:

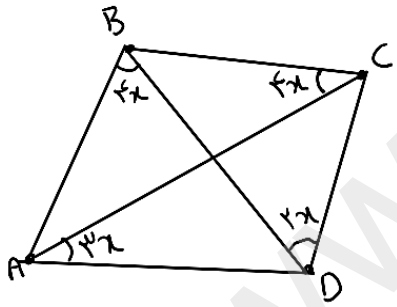
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان
دبیرستان علامه حلی (۷) تهران

۸- الف) در دو دایره $C(O, ۵x - ۳)$ و $\acute{C}(\acute{O}. ۲x + ۴)$ متخارج اند . اگر $d = ۱۰$ خط المرکزین باشد . حدود x را بیابید . (۰/۵ نمره)

ب) دو دایره $C, \acute{C}$ مفروض اند . اگر اندازه شعاع یکی از آن ها یک واحد بیشتر از دیگری باشد و طول مماس مشترک داخلی دو دایره برابر $۲\sqrt{۳}$ و خط المرکزین $\sqrt{۳۷}$ باشد شعاع دو دایره را بیابید . وضعیت دو دایره نسبت به هم چگونه است ؟ (۱ نمره)

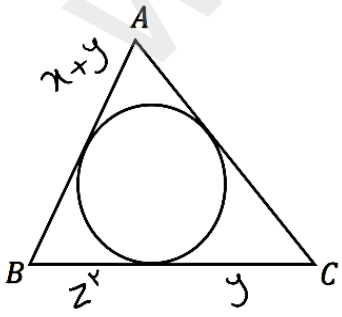
۹- الف) ثابت کنید $ABCD$ یک چهارضلعی محیطی است اگر و تنها اگر حاصل جمع اضلاع رو به رو آن با هم برابر باشد . (۱/۵ نمره)

ب) در شکل زیر اگر $ABCD$ یک چهارضلعی محاطی باشد ، با توجه به اندازه های روی شکل ، نسبت اندازه زاویه A به B را بیابید . (۱ نمره)



۱۰- الف) در مثلث محیطی شکل زیر مقادیر مجهول را بیابید . (۱ نمره)

$(AB = ۱۰ , AC = ۶, BC = ۱۲)$



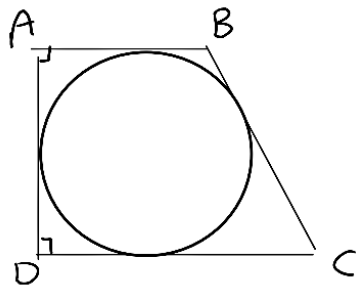
www-kanoon-ir

نام:
نام خانوادگی:
شماره:
کلاس: رشته:

به نام خداوند جان و خرد

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان
دبیرستان علامه حلی (۷) تهران

ب) در شکل زیر $AB = ۱۰$ و $CD = ۱۵$ است . شعاع دایره محاطی کدام است ؟ (۱ نمره)



۱۱- در یک مثلث شعاع های دایره های محاطی خارجی ۱۲ و x و ۴ است . اگر شعاع دایره محاطی داخلی برابر ۲ باشد . x را بیابید . (۱ نمره)

۱۲- ثابت کنید در مثلث ABC اگر h_a و h_b و h_c ارتفاع های اضلاع این مثلث بوده و r_a و r_b و r_c شعاع های دایره های محاطی خارجی آن باشند ، آنگاه خواهیم داشت : (۱ نمره)

(r شعاع دایره محاطی داخلی است)

$$\frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{۱}{r}$$

۱۳- در یک ذوزنقه متساوی الساقین محیطی : (۱ نمره)

الف) ثابت کنید قطر دایره محاطی واسه هندسی بین دو قاعده است .

ب) اگر طول قاعده های آن ۷ و ۱۵ باشد طول ساق و محیط آن را بیابید .

---

www-kanoon-ir

به نام خداوند جان و خرد

نام:

نام خانوادگی:

شماره:

کلاس: رشته:

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان

دبیرستان علامه حلی (۷) تهران

۱۴- الف) در مثلثی به اضلاع ۶ و ۸ و ۱۰ طول شعاع دایره محیطی و شعاع بزرگترین دایره محاطی خارجی آن چقدر است ؟ (۱ نمره)

ب) در مثلث متساوی الاضلاعی به مساحت $\sqrt{3}$ هریک از مقادیر زیر را حساب کنید . (۱ نمره)

- شعاع دایره محاطی خارجی

- شعاع دایره محاطی داخلی

یا علی

www-kanoon.ir

به نام او

سعید خانبابایی
کارشناسی مهندسی برق

نام: به نام خداوند جان و خرد
نام خانوادگی:
شماره:
کلاس: رشته:

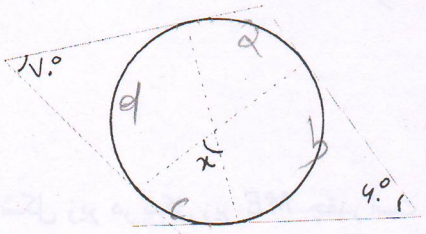
مرکز ملی پرورش استعدادهای دانش‌آموزی و دانش‌پژوهان جوان
دبیرستان علامه حلی (۷) تهران

تاریخ: ۱۴۰۲/۱۰/۴
درس: هندسه ۲
نام دبیر: آقای قربانی
زمان: ۱۱۰ دقیقه

۱- دو دایره متقاطع را تعریف کنید . (با رسم شکل) (۰/۵ نمره) صفحه‌ی بعد

۲- قضیه : ثابت کنید اندازه هر زاویه ظلی برابر با نصف کمان رو به رو به آن است . (۱ نمره) صفحه‌ی بعد

۳- در شکل زیر x را بیابید . (خطوط مماس اند) (۱ نمره)



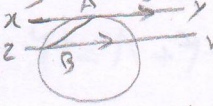
$$۶۰^\circ = \frac{a+d+c-b}{۲}$$
$$۷۰^\circ = \frac{a+b+c-d}{۲}$$
$$\Rightarrow \frac{۲a+۲c}{۲} = ۱۳۰^\circ \Rightarrow a+c = ۱۳۰^\circ$$
$$x = \frac{a+c}{۲} = \frac{۱۳۰^\circ}{۲} = ۶۵^\circ$$

۴- درستی یا نادرستی هر یک از گزاره های زیر را با ذکر دلیل کامل مشخص کنید . (۳ نمره)

الف) اگر دو دایره $C, \acute{C}$ دارای ۲ مماس مشترک خارجی و یک مماس مشترک داخلی باشند آنگاه متقاطع اند . مماس برون

ب) اگر فاصله نقطه A تا نزدیک ترین نقطه دایره $C(O,۳)$ برابر ۷ باشد آنگاه A درون دایره است . نادرست چون ۷ بزرگتر از شعاع است

ج) کمان های بین خط مماس بر دایره و وتری موازی با آن با یکدیگر برابرند . درست



$$\hat{BAx} = \hat{ABw}$$

د) در دایره ای به شعاع ۲ مساحت قطعه ایجاد شده توسط کمانی به زاویه ۳۰ درجه برابر با $\frac{\pi}{۲}$ است . نادرست

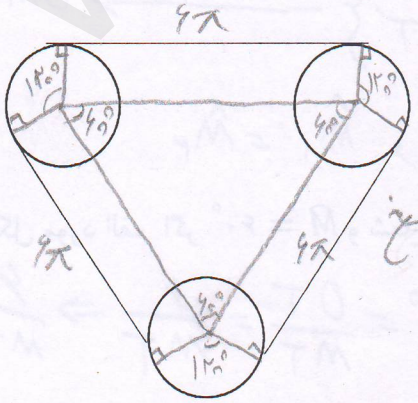
$$\frac{۳۰^\circ}{۳۶۰^\circ} \times ۲^۲\pi = \frac{۲\pi}{۳}$$

و) ذوزنقه متساوی الاساقین یک چهارضلعی محاطی است (درست)

ی) اگر شعاع دایره محاطی داخلی یک چند ضلعی محیطی برابر ۱۰ و مساحت ۲۰ باشد محیط آن ۲ می باشد . نادرست

$$۲ = \frac{S}{P} \Rightarrow ۱۰ = \frac{۲۰}{P} \Rightarrow P = ۲ \rightarrow \text{محیط} = ۲P = ۴$$

۵- در شکل زیر ، سه دایره به شعاع های برابر ۲ می باشند . این سه دایره به وسیله نخی بسته شده اند . اگر فاصله دو به دو مرکز ها ۶π باشد ، طول نخ کدام است ؟ (۱ نمره)

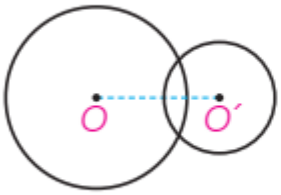


$$\frac{۱۲۰^\circ}{۳۶۰^\circ} \times ۲\pi \times ۳ = ۲\pi \times ۲ = ۴\pi$$
$$\text{طول نخ} = ۳ \times ۶\pi + ۴\pi = ۲۲\pi$$

www.kanoon.ir

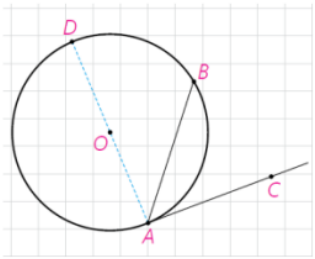
سوال ۱:

دو دایره که دو نقطه ی مشترک داشته باشند را دو دایره ی متقاطع می نامیم

دو دایره متقاطع	$R - R' < d < R + R'$	

سوال ۲:

زاویه ی ظلّی حادّه باشد:

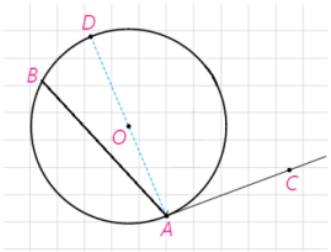


$$\hat{DAC} = 90° \Rightarrow \hat{DAC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$$

$$\text{محاطی } \hat{DAB} \Rightarrow \hat{DAB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DB}$$

$$\hat{DAC} - \hat{DAB} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{DB}) \Rightarrow \hat{BAC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$$

زاویه ی طلّی منفرجه باشد:



$$\hat{DAC} = 90° \Rightarrow \hat{DAC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$$

$$\text{محاطی } \hat{DAB} \Rightarrow \hat{DAB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DB}$$

$$\hat{DAC} + \hat{DAB} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DB}) \Rightarrow \hat{BAC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$$

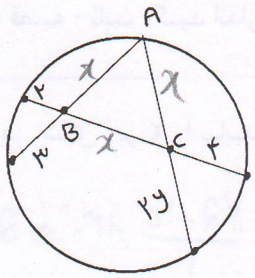
www.karnoon.ir

نام:
نام خانوادگی:
شماره:
کلاس: رشته:

به نام خداوند جان و خرد

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان
دبیرستان علامه حلی (۷) تهران

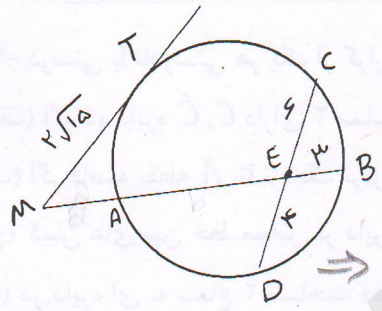
۶- الف) در شکل زیر ABC مثلث متساوی الاضلاع است . طول ضلع مثلث ABC و اندازه y کدام است ؟ (۰/۷۵ نمره)



$x \times 3 = 2(x+4) \Rightarrow 3x = 2x + 8$
$\Rightarrow x = 8$

$x(2y) = 4(x+2) \Rightarrow 8 \times 2y = 4 \times 10 \Rightarrow y = 2/5$

ب) در شکل زیر در شکل زیر ME چقدر است ؟ (MT مماس است .) (۰/۷۵ نمره)



$BE \cdot AE = CE \cdot DE \Rightarrow 3AE = 6 \times 4 \Rightarrow AE = 8$

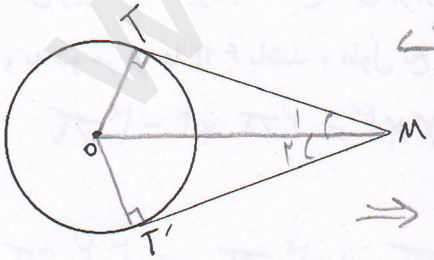
$MT^2 = MA \cdot MB \Rightarrow (2\sqrt{15})^2 = MA(MA+8+3)$

$\Rightarrow MA^2 + 11MA - 60 = 0 \Rightarrow (MA-4)(MA+15) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} MA = 4 \\ MA = -15 \text{ غ ق ق} \end{cases}$

$ME = MA + AE = 4 + 8 = 12$

۷-الف) اگر از نقطه M ، بیرون دایره $C(O.R)$ دو مماس MT و $M\acute{T}$ را رسم کنیم ، ثابت کنید : $MT = M\acute{T}$.
(۰/۵ نمره)



$MO = MO$ مشترک
$OT = OT'$
وتر و یک ضلع قائم $\Rightarrow O\hat{M}T \cong O\hat{M}T'$

$\Rightarrow MT = MT', \hat{M}_1 = \hat{M}_2$

ب) در شکل مورد الف اگر $\hat{M} = 60^\circ$ و شعاع دایره ۶ باشد طول مماس MT چقدر است ؟ (۰/۵ نمره)

$\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = \frac{\hat{M}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{OT}{MT} = \frac{6}{MT} \Rightarrow \frac{6}{MT} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow MT = 6\sqrt{3}$

www.karnoon.ir

نام:
نام خانوادگی:
شماره:
کلاس: رشته:

به نام خداوند جان و خرد

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان
دبیرستان علامه حلی (۷) تهران

۸- الف) در دو دایره $C(O, 5x-3)$ و $\acute{C}(\acute{O}. 2x+4)$ متخارج اند . اگر $d = 10$ خط المرکزین باشد . حدود x را بیابید . (۰/۵ نمره)

$d > R+R' \Rightarrow 10 > 2x+4+5x-3$

$\Rightarrow 7x+1 < 10 \Rightarrow x < \frac{9}{7}$ ②

$2x+4>0 \Rightarrow x > -2$

$5x-3>0 \Rightarrow x > \frac{3}{5}$ ①

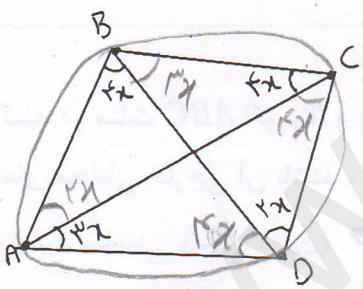
① ∩ ② $\Rightarrow \frac{3}{5} < x < \frac{9}{7}$

ب) دو دایره $C, \acute{C}$ مفروض اند . اگر اندازه شعاع یکی از آن ها یک واحد بیشتر از دیگری باشد و طول مماس مشترک داخلی دو دایره برابر $2\sqrt{3}$ و خط المرکزین $\sqrt{37}$ باشد شعاع دو دایره را بیابید . وضعیت دو دایره نسبت به هم چگونه است ؟ (۱ نمره)

۹- الف) ثابت کنید $ABCD$ یک چهارضلعی محیطی است اگر و تنها اگر حاصل جمع اضلاع رو به رو آن با هم برابر باشد . (۱/۵ نمره)

صفحه‌ی بعد

ب) در شکل زیر اگر $ABCD$ یک چهارضلعی محاطی باشد ، با توجه به اندازه های روی شکل ، نسبت اندازه زاویه A به B را بیابید . (۱ نمره)



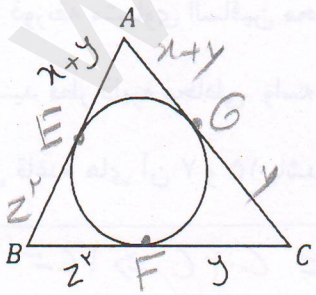
$\hat{A}\hat{B} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$

$B\hat{D}C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$

$\Rightarrow \hat{A}\hat{B} = B\hat{D}C = 2x$

$\frac{\hat{A}}{\hat{B}} = \frac{4x}{7x} = \frac{4}{7}$

۱۰- الف) در مثلث محیطی شکل زیر مقادیر مجهول را بیابید . (۱ نمره)



$(AB = 10, AC = 6, BC = 12)$

$P = \frac{6+10+12}{2} = 14$

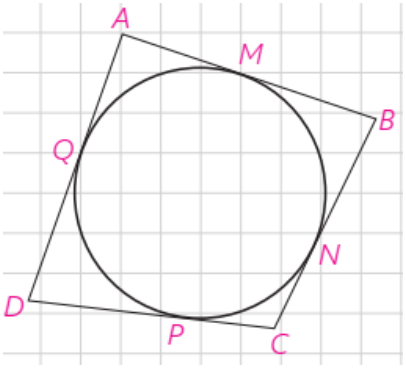
$CG = P-c = 14-10 = 4 \Rightarrow y = 4$

$AE = P-a = 14-12 = 2 \Rightarrow x+y = 2 \Rightarrow x+4 = 2 \Rightarrow x = -2$

$BE = P-b = 14-6 = 8 \Rightarrow z^2 = 8 \Rightarrow z = \pm 2\sqrt{2}$

www.kanoon.ir

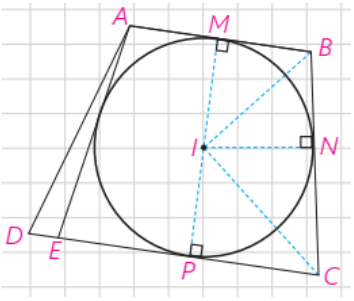
سوال ۹: قسمت الف



فرض می کنیم چهارضلعی $ABCD$ محیطی باشد.

می دانیم مماس های رسم شده بر یک دایره از یک نقطه با هم برابرند:

$$AB + CD = AM + MB + PC + PD = AQ + BN + CN + DQ = AD + BC$$



در عکس قضیه که با برهان خلف اثبات خواهیم کرد فرض می کنیم $AB + CD = BC + AD$

نیمساز های دو زاویه ی B و C یک دیگر را در نقطه ای مانند I قطع می کنند. با توجّه به ویژگی نیمساز نقطه ی I از سه ضلع AB و BC و CD به یک فاصله است بنابراین دایره ای به مرکز I و شعاع IM بر سه ضلع AB و BC و CD مماس است.

حال فرض می کنیم این دایره بر ضلع AD مماس نباشد پس از نقطه ی A مماسی بر دایره رسم می کنیم تا خط CD را در نقطه ی مانند E قطع کند پس:

$$AB + EC = AE + BC \xrightarrow{AB+CD=BC+AD} BC + AD - CD + EC = AE + BC \Longrightarrow AD - DE = AE \Longrightarrow AD = DE + AE$$

در فصل اوّل هندسه ی دهم یاد گرفتیم که شرط تشکیل مثلّث(قضیه ی نابرابری مثلّثی) $AD < AE + DE$ می باشد بنابراین $AD = DE + AE$ غیرممکن است و در نتیجه E همان D است و دایره بر ضلع AD نیز مماس است.

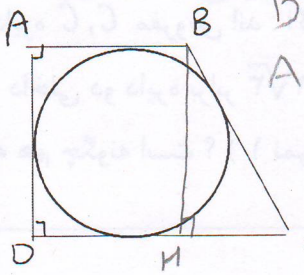
www-kanoon-ir

نام:
نام خانوادگی:
شماره:
کلاس: رشته:

به نام خداوند جان و خرد

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان
دبیرستان علامه حلی (۷) تهران

ب) در شکل زیر $AB = ۱۰$ و $CD = ۱۵$ است . شعاع دایره محاطی کدام است ؟ (۱ نمره)



$AB+CD = ۱۰+۱۵ = ۲۵$

$BH = ۲r$

$AB+CD = AD+BC = ۲۵ \Rightarrow ۲r+BC = ۲۵ \Rightarrow BC = ۲۵-۲r$

$BH^۲ + CH^۲ = BC^۲ \Rightarrow (۲r)^۲ + (۱۵-۱۰)^۲ = (۲۵-۲r)^۲$

$۴r^۲ + ۲۵ = ۴r^۲ - ۱۰۰r + ۲۵^۲$

$\Rightarrow ۱۰۰r = ۶۲۵-۲۵ = ۶۰۰ \Rightarrow r = ۶$

۱۱- در یک مثلث شعاع های دایره های محاطی خارجی ۱۲ و x و ۴ است . اگر شعاع دایره محاطی داخلی برابر ۲ باشد . x را بیابید . (۱ نمره)

$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{r} \Rightarrow \frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{x} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۶$

۱۲- ثابت کنید در مثلث ABC اگر h_a و h_b و h_c ارتفاع های اضلاع این مثلث بوده و r_a و r_b و r_c شعاع های دایره های محاطی خارجی آن باشند ، آنگاه خواهیم داشت : (۱ نمره)

(r شعاع دایره محاطی داخلی است)

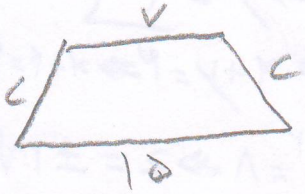
$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c} = \frac{۱}{r}$$

صفحه‌ی بعد

۱۳- در یک ذوزنقه متساوی الساقین محیطی : (۱ نمره)

الف) ثابت کنید قطر دایره محاطی واسه هندسی بین دو قاعده است صفحه‌ی بعد

ب) اگر طول قاعده های آن ۷ و ۱۵ باشد طول ساق و محیط آن را بیابید .



محیطی $\Rightarrow ۷+۱۵ = c+c \Rightarrow ۲c = ۲۲$

$\Rightarrow c = ۱۱$

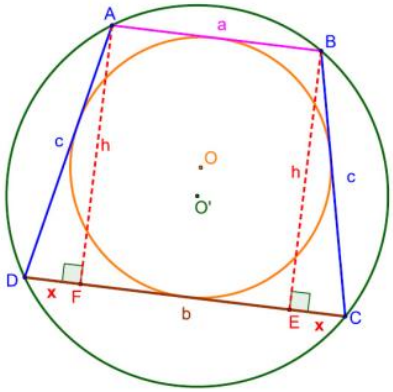
www.kanoon.ir

سوال ۱۲:

$$\left.\begin{aligned} S=\frac{۱}{۲}ah_a \Rightarrow h_a=\frac{۲S}{a} \Rightarrow \frac{۱}{h_a}=\frac{a}{۲S} \\ S=\frac{۱}{۲}bh_b \Rightarrow h_b=\frac{۲S}{b} \Rightarrow \frac{۱}{h_b}=\frac{b}{۲S} \\ S=\frac{۱}{۲}ch_c \Rightarrow h_c=\frac{۲S}{c} \Rightarrow \frac{۱}{h_c}=\frac{c}{۲S} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{a}{۲S}+\frac{b}{۲S}+\frac{c}{۲S}=\frac{a+b+c}{۲S}=\frac{۲p}{۲S}=\frac{p}{S}=\frac{۱}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}$$

سوال ۱۳: قسمت الف



$$۲c=a+b \Rightarrow c=\frac{a+b}{۲} \quad , \quad b=۲x+a \Rightarrow x=\frac{b-a}{۲}$$

$$h^۲=c^۲-x^۲ \Rightarrow h^۲=(\frac{a+b}{۲})^۲-(\frac{b-a}{۲})^۲ \Rightarrow h^۲=\frac{۴ab}{۴} \Rightarrow h=\sqrt{ab}$$

www-kanoon-ir

سوال ۱۴:

قسمت الف) مثلّث قائم الزّاویه است زیرا $6^2 + 8^2 = 10^2$

$$P = \frac{6+8+10}{2} = 12$$

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$$

شعاع بزرگ ترین دایره ی محاطی خارجی:

$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{24}{12-10} = 12$$

شعاع دایره ی محیطی تمام مثلّث ها از فرمول زیر به دست می آید:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{6 \times 8 \times 10}{4 \times 24} = 5$$

قسمت ب)

اگر اندازه ی اضلاع مثلّث a باشد:

$$S = \frac{1}{2}a.a\sin 60° = \frac{1}{2}a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \sqrt{3} \Longrightarrow a = 2 \Longrightarrow AH = \frac{a}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$P = \frac{a+a+a}{2} = \frac{3}{2}a = \frac{3}{2}$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{2}-1} = 2\sqrt{3}$$