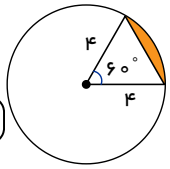
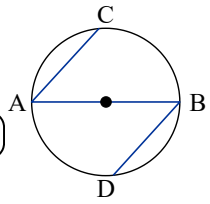
به عدد: ..... نمره تجدید نظر : به حروف: ..... نام و نام خانوادگی وامضاءتجدید نظر کننده: ..... آزمون درس : هندسه ۲ طراح سوال:	بسمه تعالی اداره کل آموزش و پرورش استان قم اداره آموزش و پرورش ناحیه چهارقم دبیرستان غیر دولتی رایحه دانش سال تحصیلی ۱۴۰۳ - ۱۴۰۲	به عدد: ..... نمره : به حروف: ..... نا م و نام خانوادگی وامضای دبیر : ..... تاریخ امتحان : / / ۱۴۰۲ مدت امتحان : ۹۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی: نام پدر : کلاس : شماره صندلی: نام دبیر :		

۱ در دایرهٔ روبه‌رو به شعاع ۴، مساحت ناحیهٔ سایه‌زده را محاسبه کنید. (این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.)



۱.۵

۲ در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند. ثابت کنید: $AC = BD$

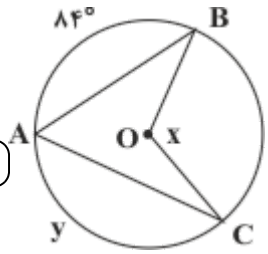


۱.۵

۳ ثابت کنید در یک دایره، کمان‌های نظیر دو وتر مساوی باهم برابرند.

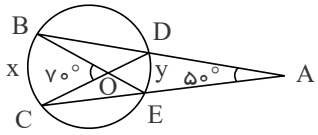
۱.۵

۴ الف) اگر $\widehat{y} = ۱۴۰^\circ$، آنگاه اندازهٔ زاویهٔ x را به دست آورید.ب) اگر $\hat{x} = ۱۶۵^\circ$، آنگاه اندازهٔ کمان $\widehat{y}$ را به دست آورید.



۱.۵

۵ با توجه به شکل‌های زیر اندازهٔ x و y را در شکل (الف) و اندازهٔ z را در شکل (ب) تعیین کنید.



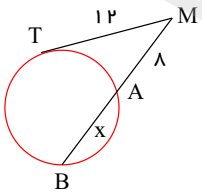
شکل (الف)



شکل (ب)

۲

۶ با توجه به شکل زیر، مقدار x را تعیین کنید.



۱.۵

۷ طول خط‌المرکزین دو دایره به شعاع‌های ۵ و ۸ برابر ۴ است، این دو دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟

۱ متداخل ۲ متقاطع ۳ متخارج ۴ مماس

۱

www-kanoon-ir

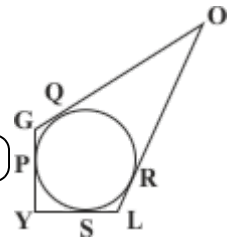
۸ طول شعاع‌های دو دایرهٔ متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $۳\sqrt{۷}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{۱۵}$ و طول خط‌المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است.

۱.۵

۹ ثابت کنید در هر چهارضلعی محاطی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگرند.

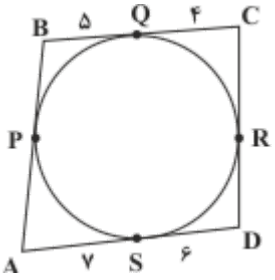
۱.۵

۱۰ ضلع‌های چهارضلعی $GOLY$ بر دایره مماس هستند. (شکل روبه‌رو)، ثابت کنید: $GO + LY = OL + GY$



۲

۱۱ در شکل زیر P، Q، R، S نقطه‌های تماس ضلع‌های چهارضلعی $ABCD$ با دایره هستند. مقدار محیط این چهارضلعی را به دست آورید.



۱.۵

۱۲ اگر r_b, r_a و r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید: $\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{r}$

به همین ترتیب اگر h_b, h_a و h_c اندازه‌های سه ارتفاع باشند، نشان دهید: $\frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{۱}{r}$

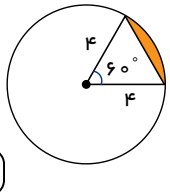
۳

www.kanoon.ir

به عدد: ..... نمره تجدید نظر : به حروف: ..... نام و نام خانوادگی وامضاء تجدید نظر کننده: آزمون درس : هندسه ۲ طراح سوال:	متعالی اداره کل آموزش و پرورش استان قم اداره آموزش و پرورش ناحیه چهارقم دبیرستان غیر دولتی رایحه دانش سال تحصیلی ۱۴۰۳ - ۱۴۰۲	به عدد: ..... نمره : به حروف: ..... نا م و نام خانوادگی وامضای دبیر : تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۱۰/۱۷ مدت امتحان : ۹۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی: نام پدر : کلاس : شماره صندلی: نام دبیر :

۱ در دایرهٔ روبه‌رو به شعاع ۴، مساحت ناحیهٔ سایه‌زده را محاسبه کنید. (این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.)

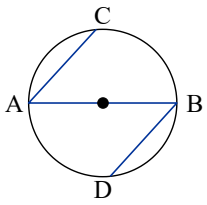


۱.۵

پاسخ:

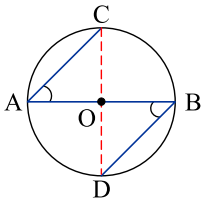
$S' = (\text{قطاع } ۶۰^\circ) S - (\text{مثلث}) \; S = \frac{۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ} \times \pi \times ۴^۲ - \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۴^۲ = \frac{۸}{۳}\pi - ۴\sqrt{۳}$ (هاشور زده)

۲ در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند. ثابت کنید: $AC = BD$



۱.۵

پاسخ:

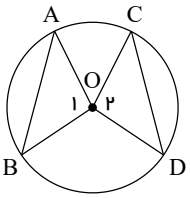


$AC \parallel BD \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$, O مرکز دایره است

$$\Rightarrow \begin{cases} OA = OC = OB = OD \\ O\hat{B}D = O\hat{D}B = O\hat{A}C = O\hat{C}A \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{OAC} \cong \overset{\Delta}{OBD} \; (\text{ض ز ض}) \Rightarrow AC = BD$$

۳ ثابت کنید در یک دایره، کمان‌های نظیر دو وتر مساوی باهم برابرند.

پاسخ:



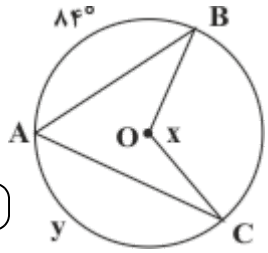
$$\begin{cases} \text{فرض} : AB = CD \\ \text{حکم} : \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \end{cases}$$

۱.۵

$$\begin{cases} OA = OC = R \\ OB = OD = R \\ AB = BC \text{ فرض} \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\Delta}{OAB} \cong \overset{\Delta}{OCD}$$

$\Rightarrow$ زاویهٔ مرکزی $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

۴ الف) اگر $\widehat{y} = ۱۴۰^\circ$، آنگاه اندازهٔ زاویهٔ x را به دست آورید.ب) اگر $\hat{x} = ۱۶۵^\circ$، آنگاه اندازهٔ کمان $\widehat{y}$ را به دست آورید.



۱.۵

پاسخ: الف) با توجه به شکل داریم:

$۸۴^\circ + y + \overset{\frown}{BC} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۳۶۰^\circ - ۸۴^\circ - ۱۴۰^\circ = ۱۳۶^\circ$

$\hat{x} = \overset{\frown}{BC} = ۱۳۶$

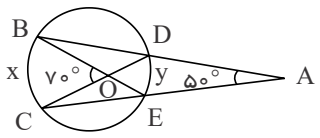
www-kanoon-ir

ب)

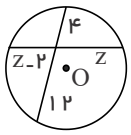
$$\hat{x} = ۱۶۵^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۱۶۵^\circ \Rightarrow ۸۴^\circ + ۱۶۵^\circ + y = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{y} = ۱۱۱^\circ$$

---

۵ با توجه به شکل‌های زیر اندازهٔ x و y را در شکل (الف) و اندازهٔ z را در شکل (ب) تعیین کنید.



شکل (الف)



شکل (ب)

پاسخ:

۲

الف) طبق شکل داریم:

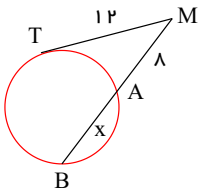
$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{۲} = ۷۰^\circ \\ \dfrac{x-y}{۲} = ۵۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱۲۰^\circ \\ y = ۲۰^\circ \end{cases}$$

ب) طبق روابط طولی داریم:

$$z(z-۲) = ۴ \times ۱۲ \Rightarrow z^۲ - ۲z - ۴۸ = ۰ \Rightarrow z = -۶ \text{ غ.ق.ق} \quad , \quad z = ۸ \text{ ق.ق}$$

---

۶ با توجه به شکل زیر، مقدار x را تعیین کنید.



۱.۵

پاسخ:

با توجه به روابط طولی در دایره داریم:

$$MT^۲ = MA \times MB \Rightarrow ۱۲^۲ = ۸ \times (۸ + x) \Rightarrow x = ۱۰$$

---

۷ طول خط‌المرکزین دو دایره به شعاع‌های ۵ و ۸ برابر ۴ است، این دو دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟

۱ متداخل ۲ متقاطع ۳ متخارج ۴ مماس

۱

پاسخ: گزینه ۲ چون $۸ - ۵ < ۴ < ۸ + ۵$ بنابراین $|R - R'| < d < R + R'$ پس دو دایره متقاطع هستند.

---

۸ طول شعاع‌های دو دایرهٔ متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $۳\sqrt{۷}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{۱۵}$ و طول خط‌المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است.

پاسخ:

۱.۵

$$\begin{cases} \text{مماس مشترک داخلی} = \sqrt{۱۵} = \sqrt{d^۲ - (R+R')^۲} = \sqrt{۶۴ - (R+R')^۲} \\ \text{مماس مشترک خارجی} = ۳\sqrt{۷} = \sqrt{d^۲ - (R-R')^۲} = \sqrt{۶۴ - (R-R')^۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (R+R') = ۷ \\ (R-R') = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = ۴ \\ R' = ۳ \end{cases}$$

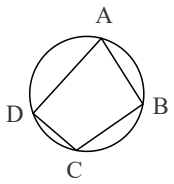
---

۹ ثابت کنید در هر چهارضلعی محاطی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگرند.

۱.۵

پاسخ: با توجه به تعریف چهارضلعی محاطی داریم:

www.kanoon.ir

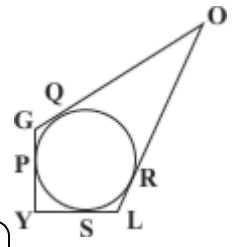


$$\widehat{B}+\widehat{D}=\frac{A\overset{\frown}{D}C}{۲}+\frac{A\overset{\frown}{B}C}{۲}\Rightarrow \widehat{B}+\widehat{D}=\frac{۳۶۰^\circ}{۲}=۱۸۰^\circ$$

به روش مشابه ثابت می‌شود: $\widehat{A}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ$

---

۱۰ **ضلع‌های چهارضلعی** $GOLY$ **بر دایره مماس هستند. (شکل روبه‌رو)، ثابت کنید:** $GO+LY=OL+GY$



۲

پاسخ: **می‌دانیم اگر از نقطه‌ای دو مماس بر دایره‌ای رسم شود طول آن مماس‌ها باهم برابر است. پس داریم:**

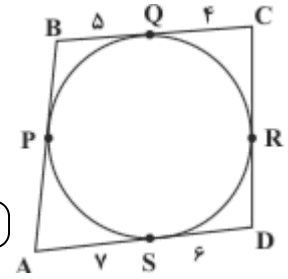
$$\begin{cases} GO+LY=GQ+QO+LS+YS \\ OL+GY=OR+RL+GP+PY \end{cases}$$

می‌دانیم $OR=OQ\ ,GP=GQ$ **و** $LR=LS\ ,PY=YS$

پس تساوی $GO+LY=OL+GY$ **برقرار است.**

---

۱۱ **در شکل زیر** P,Q,R,S **نقطه‌های تماس ضلع‌های چهارضلعی** $ABCD$ **با دایره هستند. مقدار محیط این چهارضلعی را به دست آورید.**



۱.۵

پاسخ: **از هریک از نقاط** D,A,B,C **دو مماس بر دایره رسم شده پس طول آن‌ها برابر است. بنابراین:**

$$BQ=BP=۵\ ,\ CQ=CR=۴\ ,\ DS=RD=۶\ ,\ AS=AP=۷$$

بنابراین محیط چهارضلعی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$AB+BC+CD+AD=۱۲+۹+۱۰+۱۳=۴۴$$

---

۱۲ **اگر** r_a,r_b **و** r_c **شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و** r **شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید:** $\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{r}$

به همین ترتیب اگر h_a,h_b **و** h_c **اندازه‌های سه ارتفاع باشند، نشان دهید:** $\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}$

پاسخ:

در فرمول‌های مقابل S **مساحت و** p **نصف محیط می‌باشد.**

$$r_a=\frac{s}{p-a},r_b=\frac{s}{p-b},r_c=\frac{s}{p-c},r=\frac{s}{p}$$

۳

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{\frac{s}{p-a}}+\frac{۱}{\frac{s}{p-b}}+\frac{۱}{\frac{s}{p-c}}=\frac{p-a+p-b+p-c}{s}=\frac{۳p-۲p}{s}=\frac{p}{s}=\frac{۱}{r}$$

$$S_{\underset{ABC}{\triangle}}=\frac{۱}{۲}a\cdot h_a=\frac{۱}{۲}b\cdot h_b=\frac{۱}{۲}c\cdot h_c\Rightarrow h_a=\frac{۲s}{a},h_b=\frac{۲s}{b},h_c=\frac{۲s}{c}$$

$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{a}{۲s}+\frac{b}{۲s}+\frac{c}{۲s}=\frac{a+b+c}{۲s}=\frac{۲p}{۲s}=\frac{p}{s}=\frac{۱}{r}$$