نام و نام خانوادگی :	**باسمه تعالی**	**محل مهر مدرسه**
نام درس : هندسه ۲	**آموزش و پرورش مازندران (بابل)** **تاریخ : ۳۰ /۰۲/ ۱۴۰۲**	
پایه : یازدهم ریاضی	**دوره دوم متوسطه دخترانه بهارستان** **مدت امتحان : ۹۰ دقیقه**	
	امتحانات خرداد ماه(نوبت دوم) سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱ ساعت امتحان: ۸:۳۰ صبح	

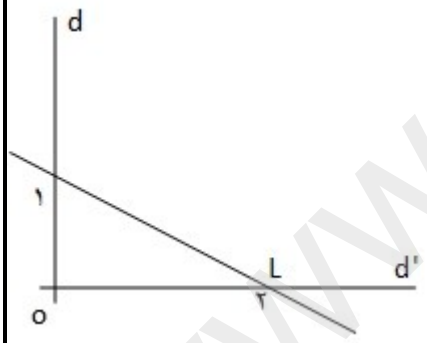
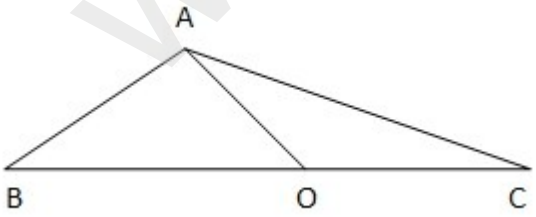
ردیف	بزرگترین آزمون گیرنده، خداست و کوچکترین آزمون دهنده، بنده‌ی خدا.	بارم
۱	ثابت کنید یک ذورنقه محاطی است اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد.	۱/۵
۲	دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی کنند با هم موازی اند ار و تنها اگر کمانهای محدود بین آنها مساوی باشد.	۲
۳	اندازه هر زاویه ظلی برابر است با نصف اندازه کمان آن.	۱/۵
۴	مفاهیم زیر را تعریف کنید: الف) طولپا ب) تبدیل	۱
۵	خواص طولپا را بنویسید.	۱

نمره به عدد : **نمره به حروف :**	**نام ونام خانوادگی دبیر:** **امضاء و تاریخ:**	**نمره تجدید نظر:** **امضاء و تاریخ:**

www-kanoon-ir

۶	اثبات کنید در هر تبدیل طولپا اندازه‌ی هر زاویه حفظ می شود.	۱/۵
۷	اثبات کنید انتقال تبدیلی طولپا است.	۱/۵
۸	یک مربع را در تجانسی با نسبت $\frac{۲}{۳}$ و مرکز محلی تلاقی قطرها تصویر کردیم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۵ باشد، محیط مربع را به دست آورید.	۱
۹	قضیه‌ی سینوس ها را بیان و اثبات نمایید. (فقط صورت قضیه و حالت $\widehat{A} = ۹۰^\circ$)	۲
۱۰	در مثلث ABC، $BC = ۱۰cm$ و $\widehat{A} = ۱۲۰^\circ$ و $AC = \frac{۱۰\sqrt{۶}}{۳}$ مقدار شعاع دایره‌ی محیطی مثلث و اندازه‌ی زوایای $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ را به دست آورید.	۱/۵

www-kanoon-ir

۱۱	ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ABC ($\widehat{A} = ۹۰^\circ$) با ارتفاع AH = ha داریم: $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{h}^۲} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b}^۲} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}^۲}$	۱/۵
۱۲	مردی می خواهد برای برداشتن آب از رودخانه‌ی ساحل رودخانه ای که لبه‌ی مستقیمی دارد برود و بعد سطل آب را به اسطبل ببرد که همان سمت رودخانه است. او از کدام نقطه از ساحل آب بردارد که مسافتی که در مجموع طی می کند کمترین حالت ممکن شود. (قضیه‌ی هرون)	۱/۵
۱۳	در شکل رو به رو اگر خط L را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{۷}{۴}$ تصویر کنیم و آن را $\mathbf{L'}$ بنامیم. مساحت بین خط L و $\mathbf{L'}$ و خطوط d و $\mathbf{d'}$ چقدر است؟ 	۱/۵
۱۴	در مثلث ABC، AB = ۳ و AC = ۵ و BC = ۷ است. طول نیمساز زاویه‌ی A را به دست آورید. 	۱
	موفق باشید	۲۰ جمع نمره

www-kanoon-ir



پاسخنامه هندسه ۲

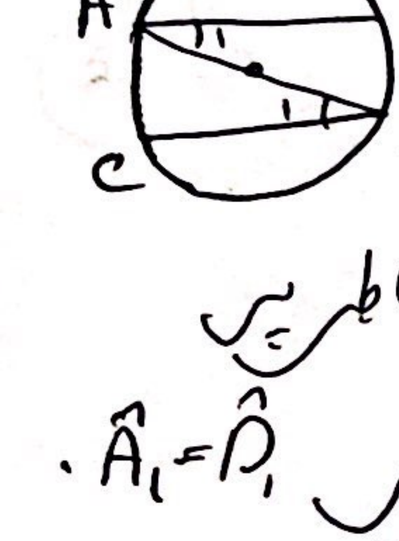
(۱۱۵ از ۱۱۵)

۱ج- فرض ذوزنقه محاطی است که: $AD = BC$

$AB \parallel DC$, $AD \rightarrow A+D=180^\circ$
$A+C=180^\circ$
$\Big\} \rightarrow A+D = A+C$
$D=C \rightarrow A=B$

زاویه‌های مجاور به ساق با هم برابرند پس ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

۲ج- اثبات: ابتدا در دایره دو وتر موازی رسم می‌کنیم و قائم‌الزاویه می‌کنیم



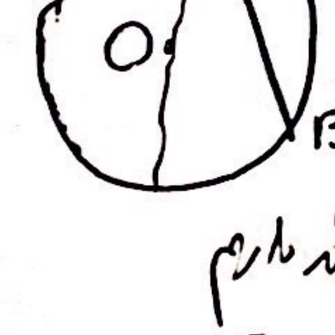
فرض $AB \parallel CD$ ع: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$

از قبل می‌دانیم که اگر خطوط موازی با شند و یک خط مورب رسم کنیم خط مورب را از A ~~در~~ در B وصل می‌کنیم پس $\hat{A}_1 = \hat{D}_1$ و در واقعی این دو محاطی اند پس

$\hat{1} = \hat{2} = \hat{3} = \hat{4}$

$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC} \leftarrow \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ پس $\hat{A}_1 = \hat{D}_1$ چون $\hat{A}_1 = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}$, $D_1 = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

— برعکس: اگر کمان‌های محدود بین دو وتر برابر باشند و قائم‌الزاویه نباشند دو وتر موازی‌اند.



فرض: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ ع: $AB \parallel BD$

ابتدا دور محیط دایره دو کمان $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ مشخص می‌کنیم طوری $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BD}$ و $\hat{D}_1$ محاطی

$\hat{A}_1 = \hat{D}_1$ پس $\frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ پس $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$, $\hat{A}_1 = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}$ محاطی $\hat{A}_1$, $\hat{D}_1 = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

طول مشترک خط‌ها مورب $\leftarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ پس با هم این دو وتر موازی‌اند.

۳ج- زاویه‌ی خاکی BAC را فرض می‌کنیم عمود AD را رسم کنید چون شعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط عمود است

ع: $B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

عمودند پس $D\hat{A}C = 90^\circ$ (۱) با توجه به این‌که عمود دایره را در ۹۰ قسمت می‌کند داریم

$D\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{ABD}}{2}$ پس (۱) و (۲) داریم $\overset{\frown}{ABD} = 180^\circ$ (۲)

از طرفی $B\hat{A}D$ محیطی است $B\hat{A}D = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}$ با استفاده از (۱) و (۲)

$B\hat{A}C = D\hat{A}C - D\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{ABD}}{2} - \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{ABD} - \overset{\frown}{BD}) =$

$= \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$

ب

Scanned with CamScanner



ج ۵ - به تبدیلی که طول پاره‌خط را حفظ می‌کند (طول پاره‌خط) را عوض نمی‌کند تبدیل طولپا یا ایزومتری می‌گوییم

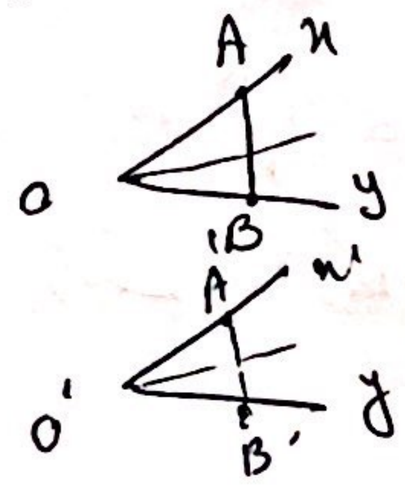
تبدیل T تالس وار مانند P که به هر نقطه‌ی $A \in P$ دقیقاً یک نقطه‌ی $A' \in P$ را نظیر می‌کند و بالعکس

$$T: P \to P$$
$$T(A) = A'$$

۲ نمره

خواص تبدیل طولپا: ① طول پاره‌خط را حفظ می‌کند ② اندازه‌ی زاویه را حفظ می‌کند ③ محیط شکل را حفظ می‌کند ④ مساحت شکل را حفظ می‌کند

۶ج - فرض کنید T تبدیل طولپا شده بوده $\hat{xoy}$ تحت تبدیل T، $\hat{x'o'y'}$ (که ثابت می‌کنیم $\hat{xoy} = \hat{x'o'y'}$) حفظ شکل می‌کند. A و B را به ترتیب روی ox، oy فرض می‌کنیم و A را نظیر A، B را نظیر B و o را نظیر o' تحت تبدیل T در نظر می‌گیریم.



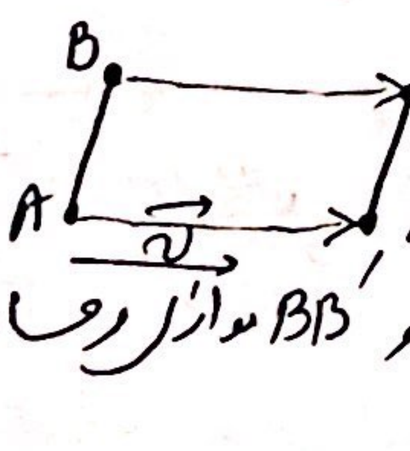
$$T(A) = A' \quad T(B) = B' \quad T(C) = C'$$

۱/۵ نمره

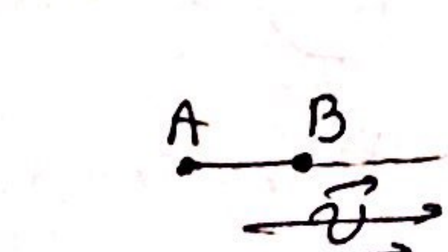
طبق فرض $\triangle oAB \to \triangle o'A'B'$

طولپا T $\Rightarrow$ $AB = A'B'$, $OB = O'B'$, $OA = O'A'$ $\xrightarrow{\text{ضض}}$ $\triangle oAB \cong \triangle o'A'B'$ $\xrightarrow{\text{اجزای تناظر}}$ $\hat{O} = \hat{O'}$

۷ج - پاره‌خط AB و بردار انتقال $\vec{v}$ را فرض می‌کنیم



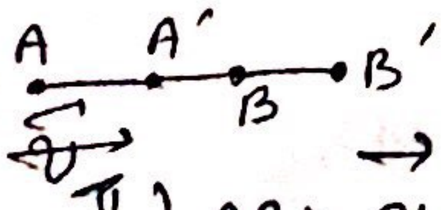
① پاره‌خط AB با $\vec{v}$ موازی نباشد. انتقال‌یافته‌ی AB تحت $\vec{v}$ را $A'B'$ می‌نامیم و رئوس $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع $AA'B'B$ می‌سازند. $AA' \parallel BB'$ و $AA' = BB' = \vec{v}$ $\Rightarrow$ $ABB'A'$ متوازی‌الاضلاع $\Rightarrow$ $AB = A'B'$



حالت دوم: پاره‌خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی باشد.

I) $AB < v$

$\hookrightarrow \vec{AA'} = \vec{BB'} = \vec{v} \to AB + A'B = A'B + A'B' \to AB = A'B'$



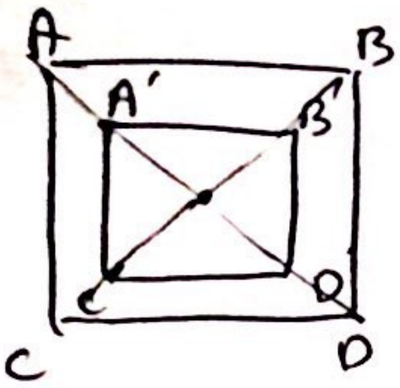
II) $AB > v$

$\hookrightarrow$ طبق تعریف انتقال $AA' = BB' = \vec{v} \Rightarrow AB - A'B = A'B' - A'B \to AB = A'B'$

۳ نمره

Scanned with CamScanner

۸- می دانیم دو شکل متشابه اند



$$\frac{S'}{S}=k^2 \rightarrow \frac{S}{S'}=k^2 \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

$$S=\frac{9}{4}S' \rightarrow S=S'=5 \rightarrow S-S'=5 \rightarrow \frac{9}{4}S'-S'=5 \rightarrow$$

$$\frac{5}{4}S'=5 \rightarrow S'=4,\ S=9 \rightarrow a^2=9 \leftrightarrow a=3$$

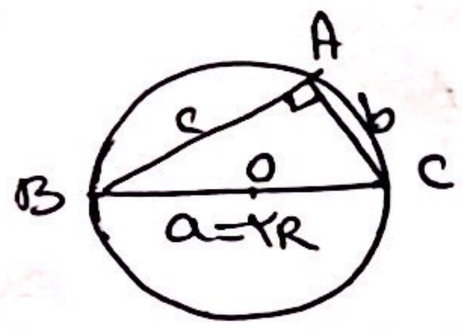
محیط $=3\times 4=12$

امتیاز

۹- در هر مثلث نسبت اندازه‌ی هر ضلع به سینوس زاویه‌ی روبرو به آن ضلع برابر است با قطر (دو برابر شعاع) دایره‌ی محیطی مثلث:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \qquad AB=c \quad BC=a \quad AC=b$$

اثبات: ABC قائم‌الزاویه است و وتر BC قطر دایره‌ی محیطی است.



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{a}{\sin 90^\circ}=\frac{a}{1}=a=2R$$

امتیاز

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{b}{\frac{b}{a}}=\frac{ab}{a}=a=2R$$

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{c}{\frac{c}{a}}=\frac{ac}{c}=a=2R$$

۱۰

$$\frac{a}{\sin A}=2R \rightarrow \sin 120=\sin(180-60)=\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow R=\frac{10\sqrt{3}}{3}$$

۱۵

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2R \rightarrow \sin B=\frac{10\sqrt{2}}{20\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

طرفین وسطین

$A=120^\circ$ ✓

$B=45^\circ$ ✓

$C=15^\circ$ ✓

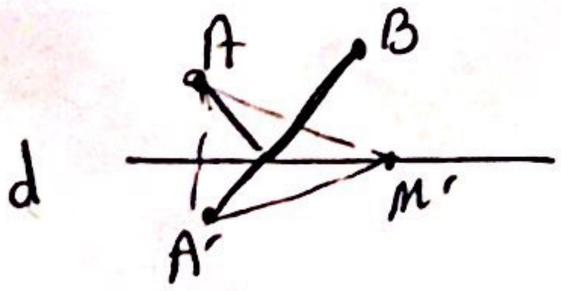
۱۱- $h_a=$ ارتفاع نظیر ضلع a

$$\left.\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}bc \\ S&=\frac{1}{2}ah \end{aligned}\right\} \rightarrow bc=ah \xrightarrow[\text{طرفین}]{\text{توان ۲}} (bc)^2=(ah)^2 \rightarrow b^2c^2=a^2h^2 \rightarrow b^2c^2=(b^2+c^2)h^2$$

$$b^2c^2=b^2h^2+c^2h^2 \xrightarrow{\div b^2c^2h^2} \frac{1}{h^2}=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}$$

۱۵ نمره

۱۲- نقطه‌ی دلخواه M_1 روی d انتخاب می‌کنیم. و نشان می‌دهیم $AM+MB<AM_1+M_1B$



نقاط تقارن نقطه‌ی A نسبت به خط d را A' می‌نامیم

$$MA=MA',\ M_1A=M_1A' \quad (1)$$

در مثلث $A'M_1B$ بنابر نامساوی مثلث می‌توان نوشت:

$$A'B<A'M_1+M_1B \rightarrow A'M+MB<A'M_1+M_1B$$

۱۵ نمره

بنابر رابطه‌ی (۱) داریم $\leftarrow$ $MA+MB<M_1A+M_1B$ پس

Scanned with CamScanner



-۱۳

(گزینه ۲)

$$\frac{S'}{S} = k^2 \rightarrow \left(\frac{۷}{۶}\right)^2 = \frac{۴۹}{۱۶} \rightarrow S' = \frac{۴۹}{۱۶} S$$

$$S = \frac{۱۶۲}{۲} = ۱ \quad , \quad A = S' - S = \frac{۴۹}{۱۶} - S = \frac{۳۳}{۱۶} S$$

$$\Big\} \quad A = \frac{۳۳}{۱۶}$$

-۱۴

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{۳}{۵} \rightarrow \frac{BD+DC}{CD} = \frac{۸}{۵} \rightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{۸}{۵} \rightarrow \frac{۷}{CD} = \frac{۸}{۵} \rightarrow$$

$$CD = \frac{۳۵}{۸} \rightarrow BD = ۷ - \frac{۳۵}{۸} = \frac{۲۱}{۸}$$

(گزینه ۱)

با قضیه منلائوس ← $AD^2 = AB.AC - BD.CD = ۳ \times ۵ - \frac{۳۵}{۸} \times \frac{۲۱}{۸} =$

$$۱۵ - \frac{۲۳۵}{۶۴} = \frac{۲۶۰}{۶۴} \rightarrow AD = \frac{۱۵}{۸}$$

---

www-kanoon-ir

Scanned with CamScanner

۷	انتقال تبدیلی طولپا است.	۱/۵
۸	یک مربع را در تجانسی با نسبت $\frac{۲}{۳}$ و مرکز محلی تلاقی قطرها تصویر کردیم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۵ باشد، محیط مربع را به دست آورید.	۱
۹	قضیه‌ی سینوس ها را بیان و اثبات نمایید. (فقط صورت قضیه و حالت $\hat{A} = ۹۰^\circ$)	۲
۱۰	در مثلث ABC، $BC = ۱۰cm$ و $\hat{A} = ۱۲۰^\circ$ و $AC = \frac{۱۰\sqrt{۶}}{۳}$ مقدار شعاع دایره‌ی محیطی مثلث و اندازه‌ی زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را به دست آورید.	۱/۵
۱۱	ثابت کنید در هر مثلث قائم الزوایه ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$) با ارتفاع $AH = ha$ داریم: $\frac{1}{h^۲} = \frac{1}{b^۲} + \frac{1}{c^۲}$	

www.kanoon.ir

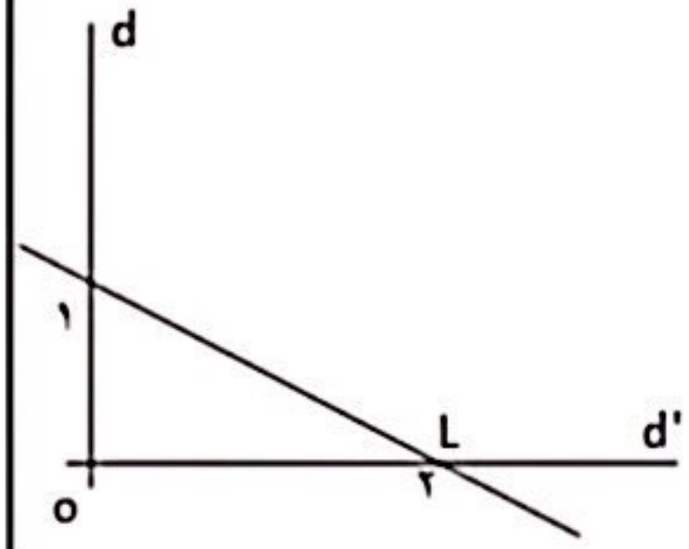
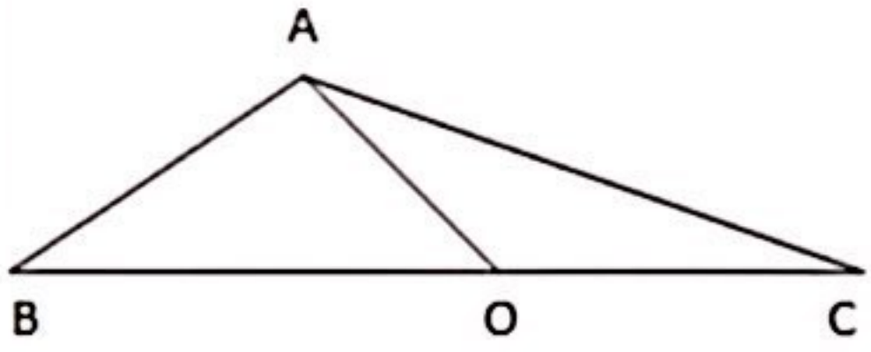
Scanned with CamScanner

«به نام خدا»		
هندسه	نام آموزشگاه: دبیرستان بهارستان	دبیر: خانم داداش پور

ردیف	بزرگترین آزمون گیرنده، خداست و کوچکترین آزمون دهنده، بنده‌ی خدا.	بارم
۱	ثابت کنید یک ذورنقه محاطی است اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد.	۱/۵
۲	دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی کنند با هم موازی اند ار و تنها اگر کمانهای محدود بین آنها مساوی باشد.	۲
۳	اندازه هر زاویه ظلی برابر است با نصف اندازه کمان آن.	۱/۵
۴	مفاهیم زیر را تعریف کنید: الف) طولپا ب) تبدیل	۱
۵	خواص طولپا را بنویسید.	۱
۶	در هر تبدیل طولپا اندازه‌ی هر زاویه حفظ می شود.	۱/۵

www-kanoon-ir

Scanned with CamScanner

۱۲	مردی می خواهد برای برداشتن آب از رودخانه‌ی ساحل رودخانه ای که لبه‌ی مستقیمی دارد برود و بعد سطل آب را به اسطبل ببرد که همان سمت رودخانه است. او از کدام نقطه از ساحل آب بردارد که مسافتی که در مجموع طی می کند کمترین حالت ممکن شود. (قضیه‌ی هرون)	۱/۵
۱۳	در شکل رو به رو اگر خط L را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{۷}{۴}$ تصویر کنیم و آن را L' بنامیم. مساحت بین خط L و L' و خطوط d و d' چقدر است؟ 	۱/۵
۱۴	در مثلث ABC، $AB = ۳$ و $AC = ۵$ و $BC = ۷$ است. طول نیمساز زاویه‌ی A را به دست آورید. 	۱

Scanned with CamScanner