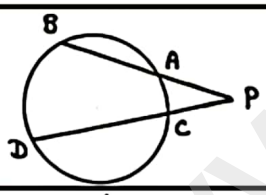
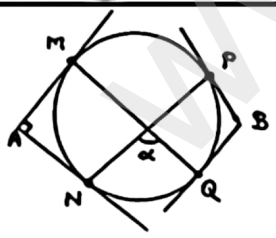
باسمه تعالی

سوالات آزمون " ترم اول" درس:	هندسه۲	پایه:	یازدهم	تاریخ آزمون:	۱۴۰۳/ ۱۰/۰۲	تعداد صفحه:	۲ صفحه
نام دبیر: جناب آقای	حسین حاجیلو	رشته:	ریاضی	کلاس:		مدت آزمون:	۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:		واحد آموزش دبیرستان علامه حلی۱۰پاسداران		دبیرستان علامه حلی ۱۰ پاسداران		@Helli10pa Helli10.ir	
سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۳							

لطفاً قبل از پاسخگویی به سوالات امتحان، به نکات روبرو توجه فرمایید:

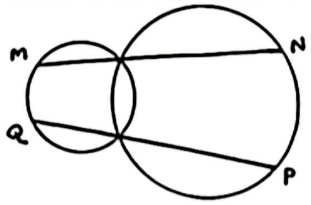
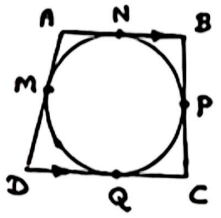
- پاسخ هر سوال فقط در قسمت مربوطه و با خودکار آبی یا مشکی در "پاسخبرگ" نوشته شود.
- استفاده از مداد، خودکار قرمز و لاک غلط گیر در همه امتحانات ممنوع است.
- استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی) ممنوع است .

ردیف	سوالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
۱	• درستی یا نادرستی هریک از عبارتهای زیر را مشخص کنید الف) طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج به طول قطرهای d و d' برابر است با $\sqrt{dd'}$. ب) شعاع دایره محاطی مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a برابر است با $\frac{\sqrt{۳}}{۳}a$. پ) چند ضلعی های منتظم، هم محاطی اند و هم محیطی. ت) در دایره $C(O,۲)$ اندازه زاویه محاطی روبروی وتر $AB=۲\sqrt{۳}$ برابر است با ۱۲۰^o .	۱
۲	• جاهای خالی را با عبارتهای مناسب پر کنید الف) مرکز دایره محیطی هر مثلث.....آن است. ب)دو دایره که طول خط المرکزین آنها با تفاضل شعاعهای آنها برابر است.....مماس مشترک دارند. پ)اگر فاصله نقطه ای از مرکز یک دایره، دو برابر شعاع آن باشد،زاویه بین دو مماس مرسوم از آن نقطه بر دایره.....است. ت)در دایره $C(O,۵)$ ،طول کمانی به اندازه ۳۶^o برابر است با.....	۱
۳	ثابت کنید در یک دایره، از میان دو وتر نابرابر، وتری بزرگتر است که به مرکز دایره نزدیکتر است.	۱/۲۵
٤	خط d در نقطه A واقع بر یک دایره برآن مماس است. اگر در این دایره، وتر BC با خط d موازی باشد،ثابت کنید: اندازه کمانهای AC و AB با هم برابر است.	۱/۲۵
۵	مطابق شکل، امتداد وترهای AB و CD همدیگر را در نقطه P قطع کرده اند. ثابت کنید: $PA.PB=PC.PD$ 	۱
٦	مطابق شکل، اضلاع زاویه های $\hat{A}=۹۰^o$ و $\hat{B}=۱۲۰^o$ بردایره مماس اند. الف)زاویه α را بدست آورید. ب)طول پاره خط های MN و PQ را برحسب R(شعاع دایره) بیان کنید. 	۱/۷۵
۷	در مثلث ABC اگر $\hat{A}=۹۰^o$ و BC=a ، آنگاه ثابت کنید: الف)شعاع دایره محاطی داخلی $p-a$ است. ب) مساحت برابر با $p(p-a)$ است. (با استفاده از قسمت الف) (منظور از p ، نصف محیط مثلث است.)	۱/۷۵

www.karnoon.ir
CamScanner

باسمه تعالی

سوالات آزمون " ترم اول" درس:	هندسه۲	پایه:	یازدهم	تاریخ آزمون:	۱۴۰۳/ ۱۰/۰۲	تعداد صفحه:	۲ صفحه
نام دبیر: جناب آقای	حسین حاجیلو	رشته:	ریاضی	کلاس:		مدت آزمون:	۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:		واحد آموزش دبیرستان علامه حلی۱۰پاسداران		دبیرستان علامه حلی ۱۰ پاسداران		@Helli10pa Helli10.ir	
سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۳							

۸	مطابق شکل، MN و PQ از نقاط تقاطع دو دایره می‌گذرند. نشان دهید: $MQ \parallel NP$ 	۱/۲۵
۹	مطابق شکل، اضلاع ذوزنقه ABCD بر دایره مماس اند، ثابت کنید: $AN.DQ = BN.CQ$ 	۲
۱۰	اگر S_n مساحت nضلعی منتظم محاط در یک دایره و S'_n مساحت nضلعی محیط برهمان دایره باشد، ثابت کنید: $\frac{S_n}{S'_n} = \cos^2(\frac{180^o}{n})$	۱/۷۵
۱۱	در مثلث ABC، ثابت کنید: $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_c}$ (منظور از h_a ارتفاع وارد بر ضلع BC=a و منظور از r_c، شعاع دایره محاطی خارجی نظیر ضلع AB=c است.)	۱/۷۵
۱۲	نقاطی از دایره $C(O,R)$ که از خط d به فاصله ۲واحد هستند، راسهای یک مثلث متساوی الاضلاع اند. طول وتری از این دایره را که برخط d واقع است، محاسبه کنید.	۲
۱۳	در مثلث ABC به اضلاع AB=۳ ، AC=٤ و BC=٦ نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه B، نیمساز داخلی زاویه A را به ترتیب در I و I' قطع می کنند. طول تصویر قائم پاره خط II' را: الف) برضلع BC ب) برخط گذرنده از ضلع AC بدست آورید.	۲/۲۵
	مجموع	۲۰

www.kanoon.ir

CamScanner

«به نام خدا»

پندار رجبی اودسری
مهندسی کامپیوتر امیرکبیر
رتبه ۱۰۰ منطقه ۲

سؤال ابهام دارد

$\hat{AP'B}$ زاویه ← اگر زاویه $\hat{AP'B}$ را به عنوان زاویه محاطی روبه‌روی وتر AB در نظر گرفتیم جواب

① :

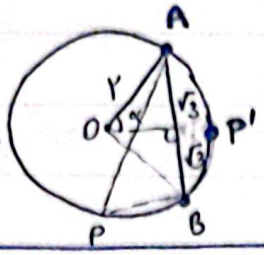
الف) ص ب) غ پ) ص ت) غ

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \to \alpha = 60°$

$\hat{AOB} = 120°$

$\overset{\frown}{AB} = 120° \to \hat{APB} = 60°$

زاویه محاطی روبه‌روی وتر AB



② :

الف) محل برخورد عمود منصف‌های / ب) یک (همواره داخل‌اند) / پ) 60° / ت) π

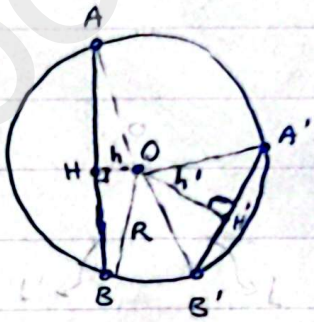
ث) $\pi \times 2 \times 60 =$



$\sin A = \frac{1}{2} \to \alpha = 30°$

$2\alpha = 60°$

③ : حکم: $h < h' \longrightarrow AB > A'B'$



در $\triangle OHB$ داریم: $BH^2 = OB^2 - OH^2 = R^2 - h^2$

در $\triangle OH'B'$ داریم: $(B'H')^2 = (OB')^2 - (OH')^2 = R^2 - h'^2$

حال می‌توان گفت:

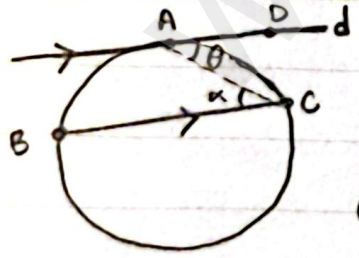
$h < h' \longrightarrow h^2 < (h')^2 \longrightarrow -h^2 > -(h')^2$

$\xrightarrow{+R^2} R^2 - h^2 > R^2 - (h')^2 \longrightarrow BH^2 > (B'H')^2 \xrightarrow{BH, B'H' > 0} BH > B'H'$

$\xrightarrow{\times 2} 2BH > 2B'H' \longrightarrow \boxed{AB > A'B'} \longrightarrow$ حکم ثابت شد

از میان دو وتر نابرابر وتری بزرگتر است که به مرکز دایره نزدیکتر باشد.

④ : نقطه A را به نقطه C وصل می‌کنیم و زاویه‌ی $\hat{DAC}$ را θ و زاویه $\hat{ACB}$ را α می‌نامیم.



حال چون $d \parallel BC$، طبق قضیه خط‌های موازی داریم: (AC خط قاطع)

$\theta = \alpha$

از طرفی θ زاویه ظلی و α زاویه محاطی است، پس می‌توان گفت:

$\theta = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$, $\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

$\theta = \alpha \to \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \longrightarrow \boxed{\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB}}$

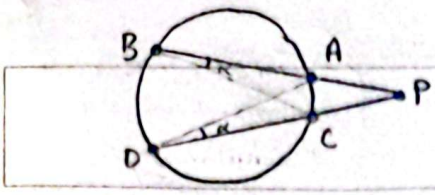
Duno

NOTE BOOK

www.kanoon.ir

CamScanner

۵) حکم : $PA \cdot PB = PC \cdot PD$



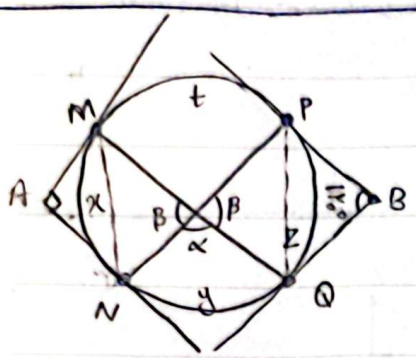
$$\hat{PBC} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}, \quad \hat{PDA} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \Rightarrow \hat{PBC} = \hat{PDA} = \alpha$$

$$\hat{BPC} = \hat{DPA}, \quad \hat{PBC} = \hat{PDA} = \alpha \xrightarrow{(ii)} \triangle PBC \sim \triangle PDA \rightarrow \frac{PB}{PD} = \frac{PC}{PA} = \frac{BC}{DA}$$

طرفین‌وسطین ← $\boxed{PB \cdot PA = PC \cdot PD}$ ✓

---

۶)



$\overset{\frown}{MP} = t$, $\overset{\frown}{MN} = x$, $\overset{\frown}{NQ} = y$, $\overset{\frown}{PQ} = z$

الف) $\hat{A}$ و $\hat{B}$ زوایای خارجی دایره هستند پس برای محاسبه آن‌ها داریم:

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{MPN} - \overset{\frown}{MN}}{2} = \frac{t+z+y-x}{2} = 90^\circ$$

$$\hookrightarrow \boxed{t+z+y-x = 180^\circ} \quad *_1$$

برای $\hat{B}$:

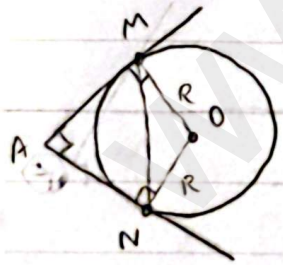
$$\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{PMQ} - \overset{\frown}{PQ}}{2} = \frac{t+x+y-z}{2} = 120 \rightarrow \boxed{t+x+y-z = 240^\circ} \quad *_2$$

$$*_1 + *_2 = 2(t+y) = 180^\circ + 240^\circ \rightarrow t+y = 90^\circ + 120^\circ = 210^\circ$$

$\hat{\alpha}$ نیز یک زاویه درون دایره است:

$$\hat{\alpha} = \frac{\overset{\frown}{MP} + \overset{\frown}{NQ}}{2} = \frac{t+y}{2} = \frac{210^\circ}{2} = \boxed{105^\circ = \hat{\alpha}}$$

ب) محاسبه MN : از O (مرکز دایره) به M و N وصل می‌کنیم که چون شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است می‌توان گفت: $\hat{M} = \hat{N} = 90^\circ$

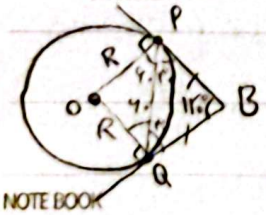


حال چون $OM = ON = R$ و هر چهار زاویه AMNO قائمه‌اند پس AMNO یک مربع است ← $AM = AN = R$

حال با استفاده از قضیه فیثاغورس در $\triangle AMN$ داریم: $MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = R\sqrt{2}$

↳ $\boxed{MN = \sqrt{2}R}$

محاسبه PQ : بطور مشابه از O به P، Q وصل می‌کنیم.

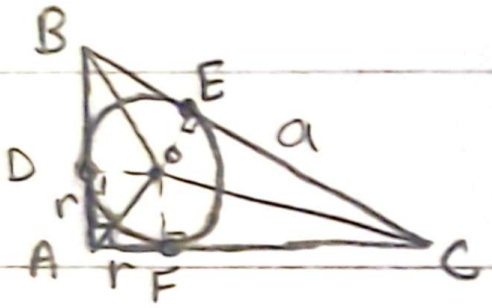


چون $PB = QB$ ← $\hat{BPQ} = \hat{EQP} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$ ← $\hat{DPQ} = \hat{OQP} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

از طرفی $OP = OQ$. پس $\triangle OPQ$ یک مثلث متساوی‌الاضلاع است ← $PQ = OP = R$

↳ $\boxed{PQ = R}$

www.kanoon.ir
NOTE BOOK
Duno
CamScanner



$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COA} + S_{\triangle BOA} \quad (V)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{R \times BC}{2} + \frac{R \times AC}{2} + \frac{R \times AB}{2} = R\left(\frac{AB+BC+AC}{2}\right) = rp \quad (*_1)$$

$$AB = AD + BD = r + BD = \boxed{r + BC - FC = AB}$$

$$BC = CE + BE = BD + FC \rightarrow BD = BC - FC$$

$$\boxed{AC = r + FC}$$

$$2p = AB + AC + BC =$$

$$r + BC - FC + r + FC + BC = 2r + 2BC$$

$$\hookrightarrow p = r + BC = r + a \rightarrow \boxed{r = p - a} \quad (*_2)$$

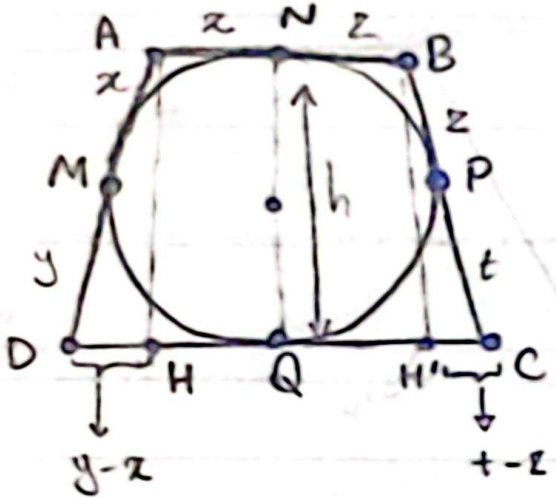
اثبات (الف)

$*_1 \rightarrow S = rp \xrightarrow{*_2} \boxed{S = (p-a)p} \rightarrow$ اثبات (ب)

(ب)

www-kanoon-ir

CamScanner



(۹) حکم: $AN \cdot DQ = BN \cdot CQ \rightarrow x \cdot y = t \cdot z$

از A و B دو خط بر ضلع CD عمود می‌کنیم.

در $A\hat{D}H$ می‌توان گفت:

$$AH^2 = AD^2 - DH^2 \Rightarrow h^2 = (x+y)^2 - (y-x)^2 = 4xy$$

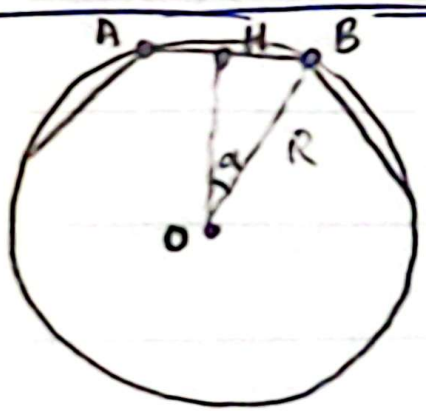
در $B\hat{C}H$ می‌توان گفت:

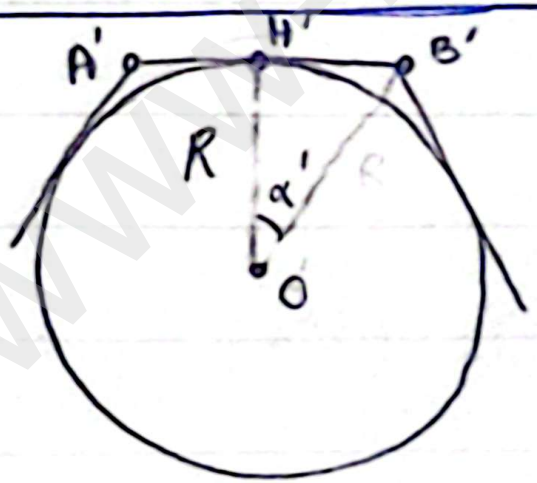
$$BH^2 = BC^2 - (CH')^2 \Rightarrow h^2 = (z+t)^2 - (t-z)^2 = 4tz$$

پس داریم:

$$h^2 = 4xy \ , \ h^2 = 4tz$$

$$\rightarrow 4xy = 4tz \longrightarrow xy = tz \rightarrow \boxed{AN \cdot DQ = BN \cdot CQ}$$





(۱۰) چون هر دو حالت ضلعی منتظم است:

$$\hat{AOB} = \hat{A'OB'} = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\rightarrow \hat{\alpha} = \hat{\alpha'} = \frac{1}{2} \times \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n}$$

www.kanoon.ir

CamScanner

از طرفی در مثلث های $B\hat{O}H$ و $B'\hat{O}H'$ می توان گفت:

$$OH = OB \times \cos(\alpha) = R\cos(\alpha) \quad , \quad \cos(\alpha') = \frac{R}{OB'} \rightarrow OB' = \frac{R}{\cos(\alpha')}$$

می دانیم با داشتن اندازه دو ضلع یک مثلث و زاویه بین آنها می توانیم مساحت آنرا محاسبه کنیم:



$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}ab\sin(\theta)$$

پس برای محاسبه مساحت های $B\hat{O}H$ و $B'\hat{O}H'$ نیز می توان نوشت:

$$S_{B\hat{O}H} = \frac{1}{2} \times OB \times OH \times \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \times R \times R\cos(\alpha)\sin(\alpha) = \frac{R^2}{2}\cos(\alpha)\sin(\alpha)$$

$$S_{B'\hat{O}H'} = \frac{1}{2} \times OB' \times OH' \times \sin(\alpha') \xrightarrow{\alpha = \alpha' = \frac{180^\circ}{n}} \frac{1}{2} \times \frac{R}{\cos(\alpha)} \times R \times \sin(\alpha) = \frac{R^2}{2}\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

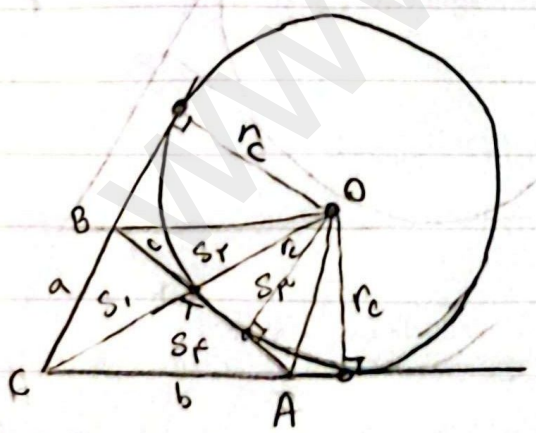
هریک از این n ضلعی های محیطی و محاطی مجموع $2n$ تا از مثلث های مشابه $B\hat{O}H$ و $B'\hat{O}H'$ هستند:

$$\left.\begin{aligned} S_n' = S_{\text{ضلعی محیطی}} &= 2n \times S_{B'\hat{O}H'} \\ S_n = S_{\text{ضلعی محاطی}} &= 2n \times S_{B\hat{O}H} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{S_n}{S_n'} = \frac{2n \times \frac{R^2}{2} \times \cos(\alpha) \times \sin(\alpha)}{2n \times \frac{R^2}{2} \times \sin(\alpha) \times \frac{1}{\cos(\alpha)}} = \cos^2(\alpha)$$

$$\xrightarrow{\alpha = \frac{180^\circ}{n}} \boxed{\frac{S_n}{S_n'} = \cos^2\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

---

(11)



$$S_{A\hat{B}C} = S = \frac{h_a \times a}{2} = \frac{h_b \times b}{2} = \frac{h_c \times c}{2}$$

$$\left(\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S} \; , \; \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S} \; , \; \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S}\right) \times 1$$

می توان گفت:

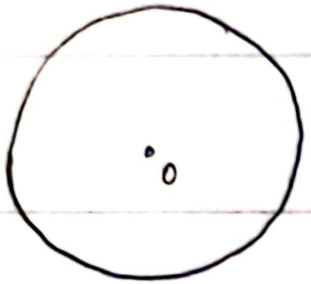
$$S_{A\hat{B}C} = S_{O\hat{C}A} + S_{O\hat{C}B} - S_{O\hat{B}A} = S$$

$$= \frac{r_c \times b}{2} + \frac{r_c \times a}{2} - \frac{r_c \times c}{2} = r_c\left(\frac{b}{2} + \frac{a}{2} - \frac{c}{2}\right) = S$$

$$\xrightarrow{\div S} r_c\left(\frac{b}{2S} + \frac{a}{2S} - \frac{c}{2S}\right) = 1 \xrightarrow{\times 1} \boxed{\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_c}}$$

www.kanoon.ir

(۱۲) برای پیدا کردن تعداد تقاطع از یک دایره که از خط دلخواه l به فاصله x هستند باید دو خط موازی l را بالا و پایین l و به فاصله x از آن رسم کنیم و



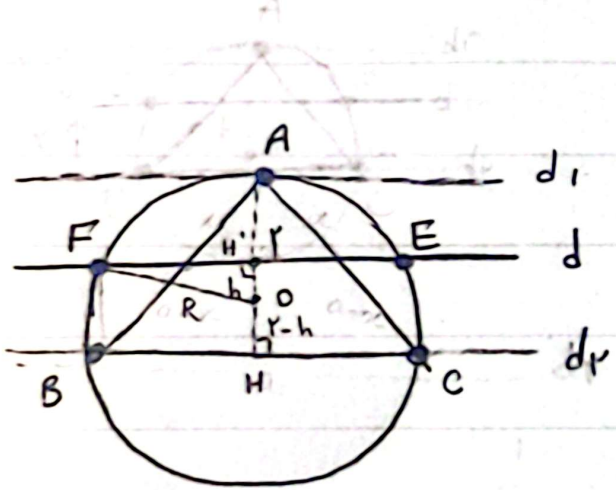
محل تقاطع این دو خط و دایره جواب‌های ما خواهند بود.

حال تعداد جواب های مسئله با توجه به محل d، اندازه x و اندازه شعاع دایره متغیر است.

چون مجموعه جواب های ما در این مسئله رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع هستند پس مجموعه جواب ۳ عضوی است.

پس خط d و طول x و دایره c باید چیزی شبیه شکل زیر باشند.

(d_1 مماس بر دایره شود و d_2 نیز دایره را در دو نقطه قطع کند.)



مرکز دایره مرکز ثقل مثلث متساوی الاضلاع است. فاصله O تا d را h در نظر می‌گیریم. حال چون O محل همرسی عمودمنصف‌ها و نیمسازهای مثلث است، می‌توان گفت نقطه O ارتفاع AH را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند:

$$\frac{AO}{OH} = ۲ = \frac{۲+h}{۲-h} \rightarrow ۴-۲h = ۲+h \quad (\hookrightarrow h = \frac{۲}{۳})$$

از طرفی:

$$R = AO = ۲+h = ۲+\frac{۲}{۳} = \frac{۸}{۳} = R$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه OFH، می‌توان گفت:

$$FH' = \sqrt{R^2-h^2} = \sqrt{\frac{۶۴-۴}{۹}} \rightarrow FH' = \frac{\sqrt{۶۰}}{۳} = \frac{۲}{۳}\sqrt{۱۵}$$

$$FE = ۲FH' = \frac{۴}{۳}\sqrt{۱۵}$$

طول وتر ایجاد شده روی خط d