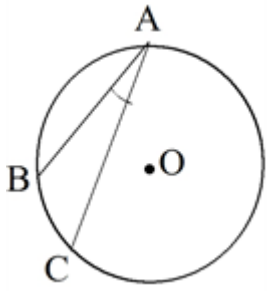
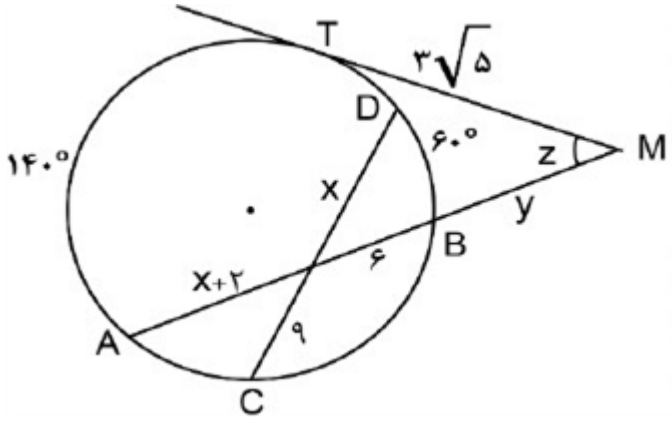
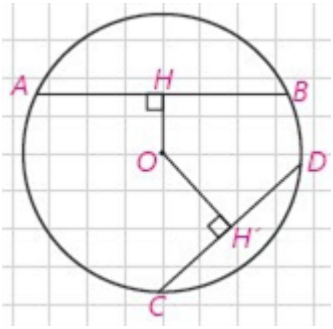
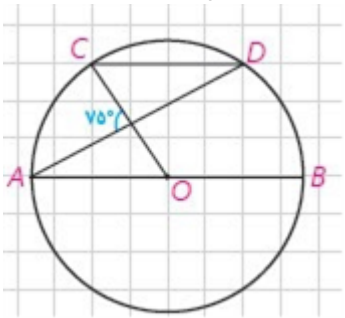
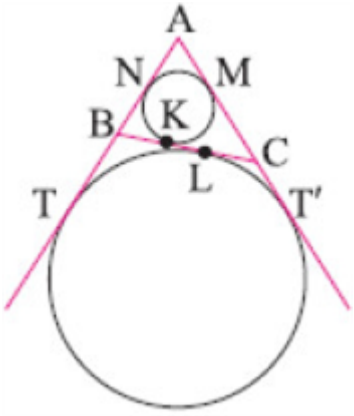
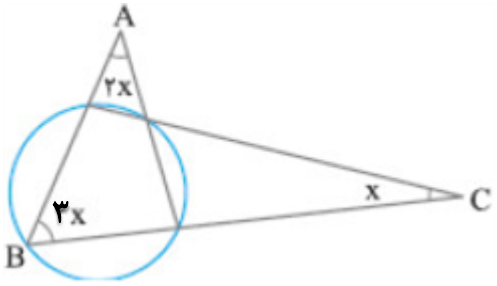
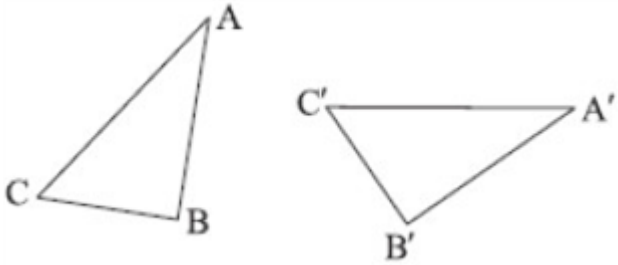
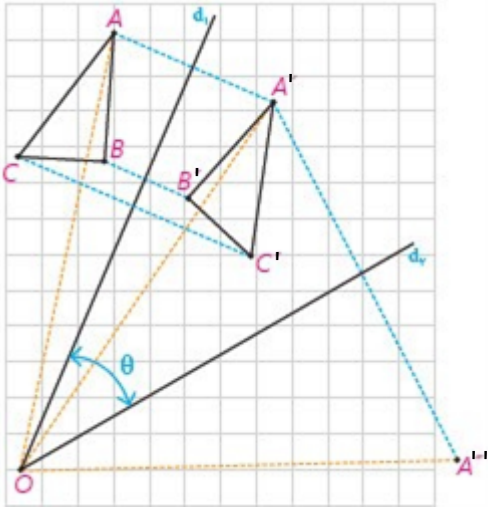
| | | | |
|---|---|---|---|
| شماره : | بسمه تعالی<br>اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران<br>اداره آموزش و پرورش منطقه 6<br>دبیرستان ماندگار البرز<br>سال تحصیلی 1402-1403 | نام درس: هندسه یازدهم<br>تاریخ آزمون: 1404/10/18<br>زمان امتحان: 110دقیقه<br>نام دبیر: آقای<br>تعداد صفحه: 4 صفحه | نمره با عدد:<br>نمره با حروف:<br>امضاء دبیر |
| نام و نام خانوادگی: | | | |
| کلاس : رشته : ریاضی | | | |

| ردیف | شرح سوال | بارم |
|---|---|---|
| ۱ | جملات زیر را با عبارت مناسب کامل کنید.<br>الف) دو دایره به شعاعهای ۳ و ۱ واحد و طول خط المرکزین ۲ واحد، نسبت به هم ..... هستند.<br>ب) در دایره‌ی $C(o,۴)$ اگر طول وتر AB برابر با ۴ باشد، مساحت قطاع OAB برابر است با .....<br>پ) دو خط d و $d'$ یکدیگر را در نقطه‌ی O با زاویه ی ۵۰ درجه قطع می‌کنند. اگر بازتاب نقطه‌ی A نسبت به d نقطه‌ی $A'$ و بازتاب نقطه‌ی $A'$ نسبت به $d'$ نقطه‌ی $A''$ باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی $AOA''$ برابر است با .....<br>ت) هرگاه به ازای هر نقطه‌ی A از صفحه داشته باشیم $T(A)=A$ تبدیل T را تبدیل ..... گوییم.(ثابت- همانی) | ۱ |
| ۲ | درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.<br>الف) دو وتر از دایره با هم موازیند اگر و تنها اگر کمانهای محصور بین آنها با هم برابر باشند.<br>ب) یک ذوزنقه‌ی متساوی الساقین لزوما محاطی است.<br>ج) هر تبدیل هندسی طولپا لزوما جهت شکل را حفظ می‌کند.<br>د) در حالت کلی بازتاب شیب خط را حفظ نمی‌کند.<br>س) دو دایره مماس خارج فقط یک مماس مشترک خارجی دارند. | ۱.۲۵ |
| ۳ | دو ضلع زاویه‌ی محاطی $\widehat{BAC}$ در یک طرف نقطه‌ی O مرکز دایره‌ی (C) قرار دارد. ثابت کنید، $\widehat{BAC}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$.<br><br> | ۱ |
| ۴ | ثابت کنید هرگاه خطهای شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M (بیرون دایره) یکدیگر را قطع کنند، آنگاه: $MA.MB=MC.MD$ | ۱ |

| | | |
|---|---|---|
| ۵ | در شکل زیر مقادیر $x$، y و z را بیابید. (MT بر دایره مماس است و $\overset{\frown}{\mathrm{TB}} = ۶۰^\circ$ و $\overset{\frown}{\mathrm{TA}} = ۱۴۰^\circ$)<br><br> | ۱ |
| ۶ | طول شعاع‌های دو دایره‌ی متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آن‌ها مساوی $۳\sqrt{۷}$ و طول مماس مشترک داخلی آن‌ها $\sqrt{۱۵}$ و طول خط المرکزین آن‌ها مساوی ۸ واحد است. | ۱ |
| ۷ | در دایره‌ی $C(O,R)$ نشان دهید اگر $\mathrm{AB} > \mathrm{CD}$ آنگاه $\mathrm{OH} < \mathrm{OH}'$ (OH و 'OH فاصله‌ی O از دو وتر AB و CD هستند.)<br><br> | ۱.۲۵ |
| ۸ | در دایره رسم شده شکل مقابل $\mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD}$، اندازه کمان CD را به دست آورید.<br><br> | ۱ |
| ۹ | دایره ی $C\,(O,R)$ و نقطه‌ی M واقع در خارج این دایره داده شده‌اند، از نقطه‌ی M بر این دایره دو مماس رسم کنید. (مراحل رسم را تو ضیح دهید.) | ۱ |
| ۱۰ | ثابت کنید در هر مثلث نیمساز هر زاویه و عمودمنصف ضلع مقابل آن زاویه در نقطه‌ای روی دایرهٔ محیطی مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند. | ۱ |
| ۱۱ | ثابت کنید یک چهارضلعی محیطی است، اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر باشند. | ۲ |

| | | |
|---|---|---|
| ۱۲ | اگر نقاط تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع M و N و K باشند و T و $T'$ و L نقطه‌های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع و P نصف محیط مثلث باشد، در این صورت ثابت کنید:<br>الف) $\mathrm{AN} = \mathrm{AM} = P - \mathrm{BC}$<br>ب) $\mathrm{AT} = \mathrm{AT}' = P$<br> | ۱.۵ |
| ۱۳ | در شکل زیر با توجه به معلومات داده شده، مقدار x را به دست آورید.<br> | ۱ |
| ۱۴ | اگر بدانیم $A'\overset{\triangle}{B}'C'$ دوران‌یافتهٔ $A\overset{\triangle}{B}C$ است، چگونه می‌توان مرکز دوران را مشخص کرد؟<br> | ۰.۵ |
| ۱۵ | در حالتی که پاره‌خط AB با محور بازتاب، <u>نه</u> موازی و <u>نه</u> متقاطع باشد و همچنین بر آن عمود <u>نباشد</u>، ثابت کنید اندازهٔ پاره‌خط AB تحت بازتاب ثابت می‌ماند. | ۱ |

| | | |
|---|---|---|
| ۱۶ | در شکل، دو خط $d_۱$ و $d_۲$ با زاویه‌ی $\theta$ یک‌دیگر را قطع کرده‌اند. مثلث $A'\overset{\triangle}{B}'C'$ بازتاب مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ نسبت به خط $d_۱$ است. بازتاب مثلث $A'\overset{\triangle}{B}'C'$ را نسبت به خط $d_۲$ رسم کنید و آن‌را $A''\overset{\triangle}{B}''C''$ بنامید.<br>الف) نشان دهید: $\widehat{AOA''} = ۲\theta$<br>ب) اندازه‌ی $\widehat{COC''}$ و $\widehat{BOB''}$ چه‌قدر است؟<br>پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''\overset{\triangle}{B}''C''$ را تصویر $A\overset{\triangle}{B}C$ دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟<br> | ۲ |
| ۱۷ | قضیه: ثابت کنید در هر انتقال، اندازه هر پاره‌خط و اندازه تصویر آن با هم برابرند. | ۱.۵ |

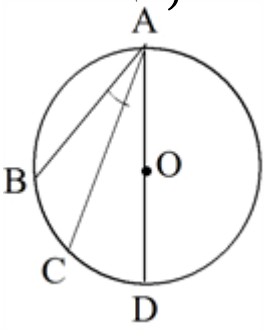
| | | | |
|---|---|---|---|
| کلید | بسمه تعالی<br>اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران<br>اداره آموزش و پرورش منطقه 6<br>دبیرستان ماندگار البرز<br>سال تحصیلی 1402-1403 | نام درس: هندسه یازدهم<br>تاریخ آزمون:<br>زمان امتحان: 110 دقیقه<br>نام دبیر: آقای<br>تعداد صفحه: 8 صفحه | نمره با عدد:<br>نمره با حروف:<br>امضاء دبیر |

۱ الف) مماس درون ب) $\frac{8\pi}{3}$ پ) ۱۰۰ درجه ت) همانی هر مورد (۰/۲۵)

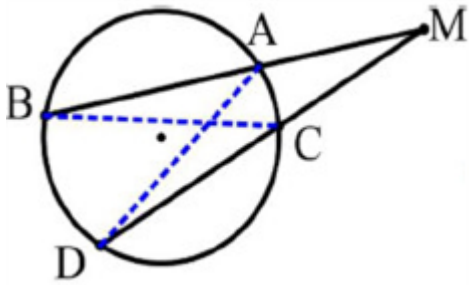
۲ الف) نادرست (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵) ج) نادرست (۰/۲۵) د) درست (۰/۲۵) س) نادرست (۰/۲۵)

۳ قطر AD را رسم می‌کنیم. زاویه‌های محاطی به‌دست آمده دارای یک ضلع که قطر دایره است می‌باشد. پس اندازه‌ی هر یک از آنها نصف کمان روبروی آنها می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{BAD}=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}\\ \widehat{CAD}=\frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}\end{array}\right\}\rightarrow \widehat{BAC}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$




۴ مثلث‌های MBC و MAD مشابه هستند.




$$\left\{\begin{array}{l}\widehat{B}=\widehat{D}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}\\ \widehat{M}=\widehat{M}\end{array}\right.\xrightarrow{\text{ز ز}}\frac{MB}{MD}=\frac{MC}{MA}$$

$$\Rightarrow MA\times MB=MC\times MD$$

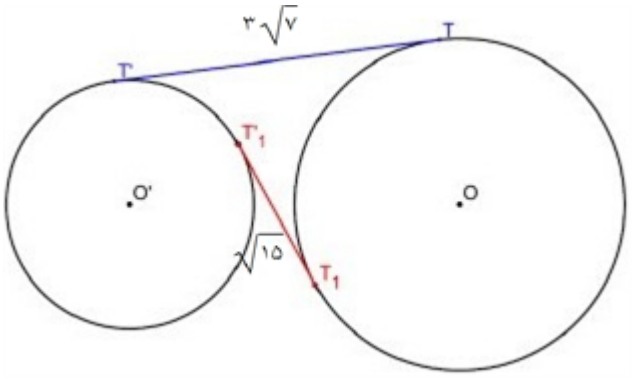
۵

$$۹x=۶(x+۲)\Rightarrow x=۴$$

$$(۳\sqrt{۵})^{۲}=y(y+۶+۶)\Rightarrow ۴۵=y^{۲}+۱۲y$$

$$y^{۲}+۱۲y-۴۵=۰\Rightarrow (y+۱۵)(y-۳)=۰\Rightarrow y=۳\Rightarrow z=\frac{۱۴۰-۶۰}{۲}=۴۰$$

۶

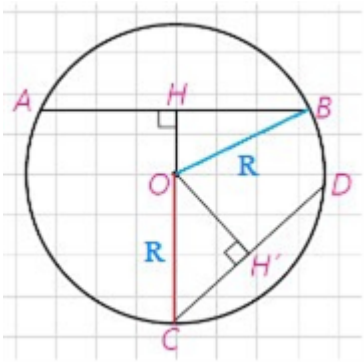



$$\left\{\begin{array}{l}TT'^{۲}=d^{۲}-(R'-R)^{۲}\\ T_۱T_۲^{۲}=d^{۲}-(R+R')^{۲}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}۶۳=۶۴-(R-R')^{۲}\\ ۱۵=۶۴-(R+R')^{۲}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}R-R'=۱\\ R+R'=۷\end{array}\right.\Rightarrow ۲R=۸\Rightarrow R=۴\Rightarrow R'=۳$$

**۷**




فرض : $AB > CD$ حکم : $OH < OH'$

$OB = OC = R \ , \ BH = \frac{AB}{۲} \ , \ CH' = \frac{CD}{۲} \ (۱)$

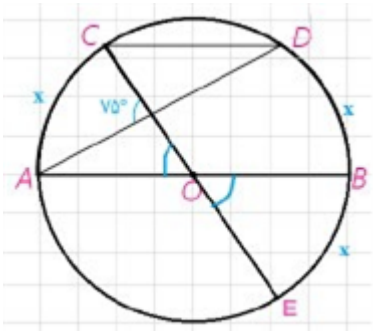
$\overset{\triangle}{OBH} : H = ۹۰^\circ \Rightarrow BH^۲ = R^۲ - OH^۲$

$\overset{\triangle}{OCH'} = H' = ۹۰^\circ \Rightarrow CH^۲ = R^۲ - OH^۲$

$AB > CD \Rightarrow \frac{AB}{۲} > \frac{CD}{۲} \xrightarrow{(۱)} BH > CH' \Rightarrow BH^۲ > CH^۲ \Rightarrow R^۲ - OH^۲ > R^۲ - OH^۲$

$\Rightarrow -OH^۲ > -OH^۲ \xrightarrow{\times(-۱)} OH^۲ < OH^۲ \xrightarrow[OH'>۰]{OH>۰} OH < OH'$

**۸**

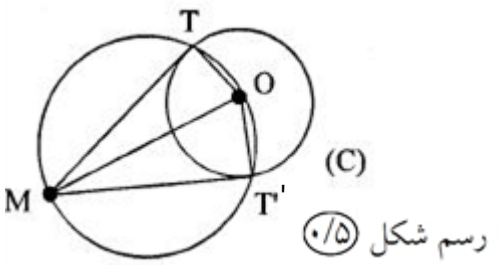



$۷۵^\circ = \frac{(x+x)+x}{۲} \Rightarrow ۱۵۰^\circ = ۳x \Rightarrow x = ۵۰^\circ$

$\overset{\frown}{CD} = ۱۸۰^\circ - ۲x \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = ۱۸۰^\circ - ۱۰۰^\circ = ۸۰^\circ$

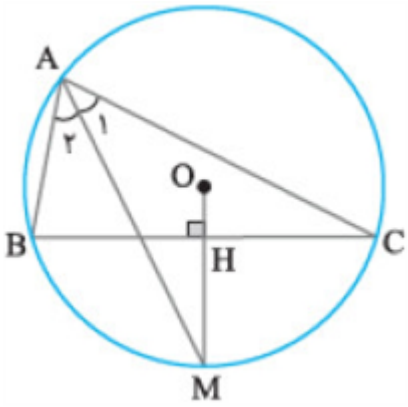
**۹** نقطه‌ی M را به O مرکز دایره‌ی (C) وصل کرده، دایره‌ی به قطر OM را رسم می‌کنیم. تا دایره‌ی (C) را در نقاط T و $T'$ قطع کند.

زاویه‌های $O\hat{T}M = O\hat{T'}M = ۹۰^\circ$ (۰/۲۵) زیرا زاویه‌های محاطی و روبه‌رو قطر هستند پس در نتیجه MT در نقطه‌ی T و $MT'$ در نقطه‌ی $T'$ بر دایره‌ی (C) مماسند. (۰/۲۵)




رسم شکل (۰/۵)

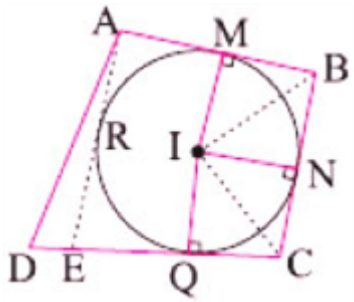
۱۰ در مثلث ABC نیمساز زاویهٔ A را رسم می‌کنیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ M قطع کند. چون $\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲$ پس $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{MC}$، یعنی M وسط کمان BC است. از طرفی عمودمنصف ضلع BC از وسط کمان BC عبور می‌کند، پس نیمساز زاویهٔ A و عمودمنصف ضلع BC هر دو از وسط کمان BC عبور می‌کنند.




۱۱

عکس: فرض: $AB + DC = AD + BC$ حکم: ABCD محیطی

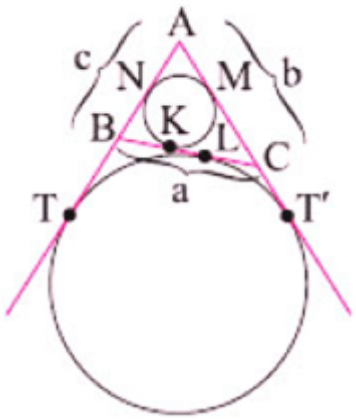
نیمسازهای $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ را رسم می‌کنیم و نقطه برخورد را I می‌نامیم. طبق تعریف نیمساز $R = IM = IN = IQ$ به مرکز I و شعاع R دایره‌ای رسم می‌کنیم ضلع‌های AB و BC و CD بر این دایره مماس‌اند زیرا شعاع وارد بر آنها عمود است. اگر AD بر دایره مماس باشد حکم ثابت می‌شود. به خلف فرض کنید AD بر دایره مماس نباشد. AE را مماس بر دایره رسم می‌کنیم. در نتیجه:




$$\left.\begin{matrix} \text{فرض}: AB + DC = AD + BC \\ \text{محیطی}\ ABCE: AB + CE = AE + BC \end{matrix}\right\} \xrightarrow{-} \cancel{DC - CE}^{DE} = AD - AE \Rightarrow AD = DE + AE$$

تناقض است، زیرا طبق نامساوی مثلث جمع دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است. فرض خلف باطل و حکم صحیح است.

**۱۲** می‌دانیم طول دو مماس رسم‌شده از یک نقطه بر دایره مساویند. پس $AN = AM$ و $CM = CK$ و $BN = BK$ و $AT = AT'$ و $BL = BT$ و $CL = CT'$ داریم:




$$\text{الف}) \left.\begin{array}{l} AN = c - \cancel{BN}^{BK} \\ AM = b - \cancel{CM}_{CK} \end{array}\right\} \xrightarrow{+}$$

$$AN + \cancel{AM}^{AN} = b + c - (\cancel{BK + CK}^{a})$$

$$\Rightarrow ۲AN = b + c - a + a - a$$

$$\Rightarrow ۲AN = ۲p - ۲a \Rightarrow AN = p - a = AM$$

$$\text{ب}) AT + \cancel{AT'}^{AT} = c + \cancel{BT}^{BL} + b + \cancel{CT'}^{CL} = b + c + (\cancel{BL + CL})^{a} = ۲p$$

$$\Rightarrow ۲AT = ۲p \Rightarrow AT = p = AT'$$

**۱۳**

چهارضلعی MPNB محاطی است، پس زاویه‌های مقابل آن مکمل‌اند پس:

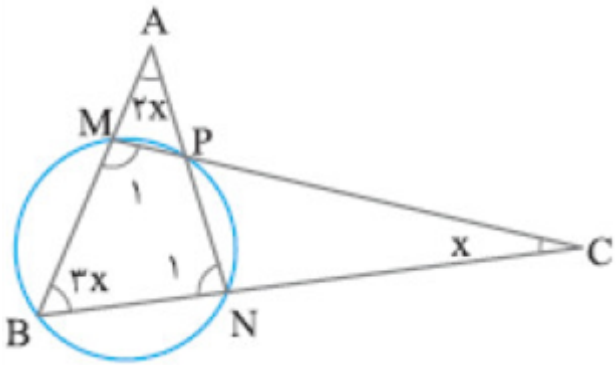
$$\widehat{M}_۱ + \widehat{N}_۱ = ۱۸۰^\circ \quad (۱)$$

در ضمن مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث $۱۸۰^\circ$ است:

$$\Delta BMC : \widehat{M}_۱ = ۱۸۰^\circ \quad ۴x \quad (۲)$$

$$\Delta ABN : \widehat{N}_۱ = ۱۸۰^\circ \quad ۵x \quad (۳)$$

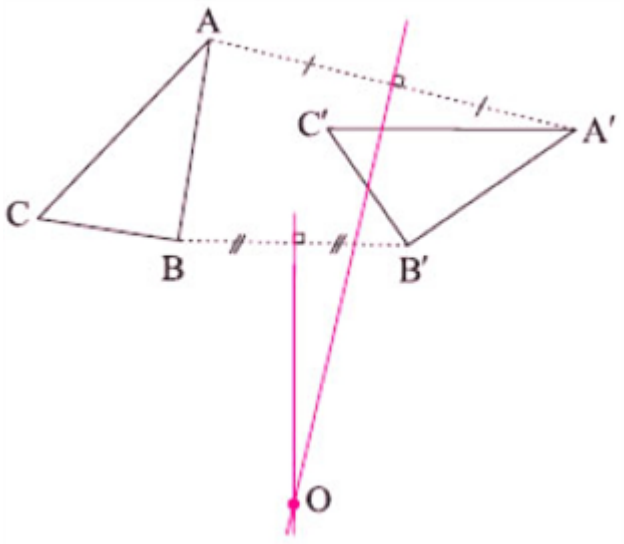
از تساوی‌های ۱، ۲ و ۳ نتیجه می‌شود:




$$۱۸۰^\circ - ۴x + ۱۸۰^\circ - ۵x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۹x = ۱۸۰^\circ$$

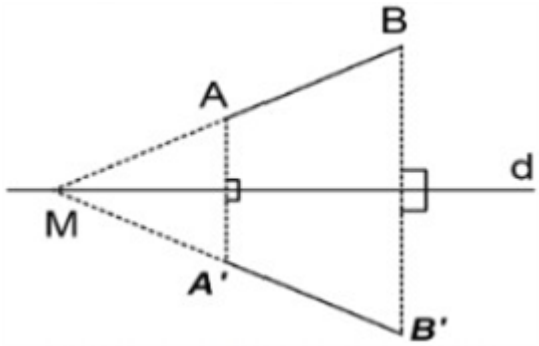
$$\Rightarrow x = ۲۰^\circ$$

**۱۴** عمودمنصف پاره‌خط‌های $AA'$ و $BB'$ را رسم می‌کنیم، محل برخورد مرکز دوران می‌باشد.




**۱۵** بنا بر فرض مسأله و مطابق شکل مقابل امتداد پاره‌خط AB محور بازتاب را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کند. اگر نقطهٔ $A'$ بازتاب نقطهٔ A نسبت به محور بازتاب d باشد، $(S_d(A) = A')$، خط $MA'$ را رسم می‌کنیم. ادعا می‌کنیم بازتاب نقطهٔ B نسبت به d روی خط $MA'$ است. از B بر خط d عمود می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا خط $MA'$ را در $B'$ قطع کند. خط d شامل نیمساز M و ارتفاع وارد بر ضلع $BB'$ از مثلث $MBB'$ است. پس $MB = MB'$ و $MA = MA'$ در نتیجه:

$$AB = MB - MA = MB' - MA' = A'B'$$



**۱۶** الف) خط $d_۱$ محور بازتاب است پس نیمساز زاویه 'AOA است یعنی: $\widehat{O}_۱ = \widehat{O}_۲$

خط $d_۲$ محور بازتاب است پس نیمساز زاویه "A'OA است یعنی: $\widehat{O}_۳ = \widehat{O}_۴$

$$\widehat{\mathrm{AOA}}'' = \widehat{O}_۱ + \widehat{O}_۲ + \widehat{O}_۳ + \widehat{O}_۴ \xrightarrow[\widehat{O}_۲ = \widehat{O}_۴]{\widehat{O}_۱ = \widehat{O}_۲}$$

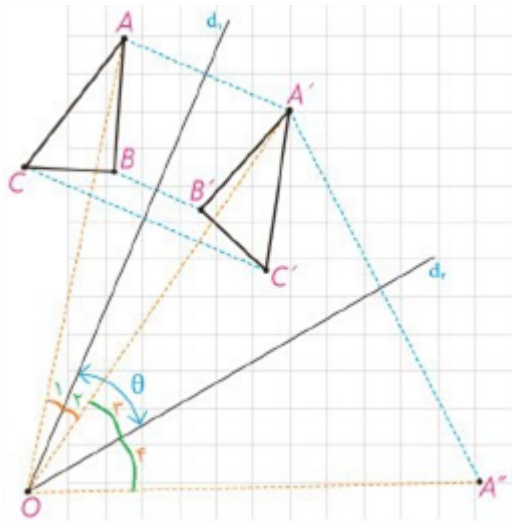
$$\widehat{\mathrm{AOA}}'' = ۲\widehat{\mathrm{O}}_۲ + ۲\widehat{\mathrm{O}}_۳ \Rightarrow \widehat{\mathrm{AOA}}'' = ۲\underbrace{\left(\widehat{\mathrm{O}}_۲ + \widehat{\mathrm{O}}_۳\right)}_{\theta}$$

$$\Rightarrow \widehat{\mathrm{AOA}}'' = ۲\theta$$

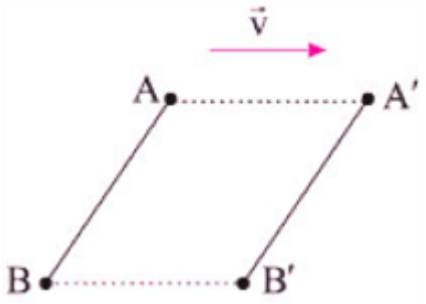
ب) بنابر اثبات الف به روش مشابه: $\widehat{\mathrm{BOB}}'' = \widehat{\mathrm{COC}}'' = ۲\theta$

پ) با دورانی به مرکز O نقطه‌ی برخورد دو خط بازتاب $d_۱$ و $d_۲$ و زاویه‌ای به اندازه‌ی دو برابر زاویه بین دو خط $(۲\theta)$ می‌توان مثلث $A''\overset{\triangle}{B}''\mathrm{C}''$ را تصویر مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ دانست.

نتیجه می‌گیریم، ترکیب دو بازتاب که محورهای بازتاب متقاطع باشند یک دوران است.



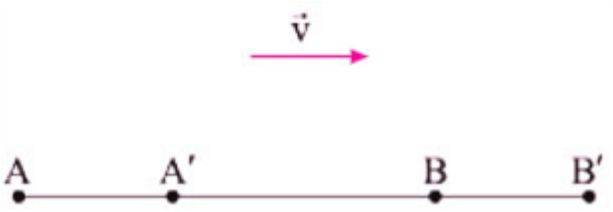
۱۷ الف) پاره‌خط دلخواه AB با بردار انتقال $\overrightarrow{v}$ موازی نباشد.
انتقال یافته AB را رسم می‌کنیم و $A'B'$ می‌نامیم.




$$\left.\begin{array}{l}AA' \parallel \overrightarrow{v}\\ BB' \parallel \overrightarrow{v}\end{array}\right\} \Rightarrow AA' \parallel BB'$$
$$\left.\begin{array}{l}AA' = v\\ BB' = v\end{array}\right\} \Rightarrow AA' = BB'$$

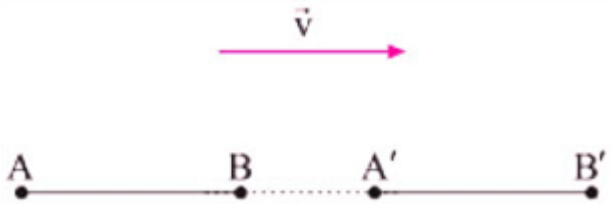
$\Rightarrow AA'B'B \Rightarrow AB = A'B'$
متوازی الاضلاع است

ب) اگر پاره‌خط AB با بردار $\overrightarrow{v}$ موازی باشد، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:
حالت اول: $AB > v$




$$\left.\begin{array}{l}AB = AA' + A'B\\ A'B' = A'B + BB'\\ \text{ویژگی انتقال}: AA' = BB'\end{array}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

حالت دوم: $AB < v$




$$\left.\begin{array}{l}AB = AA' - A'B\\ A'B' = BB' - A'B\\ \text{ویژگی انتقال}: AA' = BB'\end{array}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

تذکر: اگر طول بردار v با پاره‌خط AB برابر باشد به کمک هر یک از حالت‌های اول یا دوم می‌توان درستی رابطه را نشان داد.