نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: هندسه ۲

زمان برگزاری: ۴۰ دقیقه

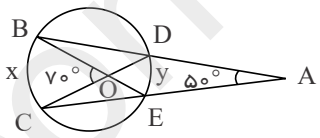
دبیرستان تلاش

۱ فرض کنید G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC (مرکز ثقل آن) باشد و مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $K = -\frac{۱}{۲}$ باشد.

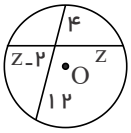
الف) جایگاه رأس‌های A' و B' و C' نسبت به مثلث ABC کجاست؟

ب) مساحت مثلث $A'B'C'$ چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

۲ با توجه به شکل‌های زیر اندازهٔ x و y را در شکل (الف) و اندازهٔ z را در شکل (ب) تعیین کنید.



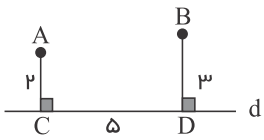
شکل (الف)



شکل (ب)

۳ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلثی با اضلاع ۸ و ۱۵ و ۱۷ چقدر است؟

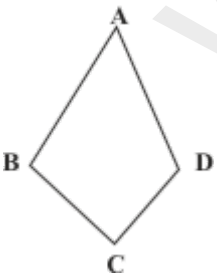
۴ مطابق شکل $CD = ۵$ است. نقطهٔ M روی d قرار دارد به طوری که مسیر AMB کوتاهترین مسیر است. طول این مسیر کدامست؟



۵ شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $۸\sqrt{۳}$ چقدر است؟

۶ مقدار a را چنان بیابید که اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۸ و ۲ و خط‌المرکزین $d = ۱۰$، برابر $۳a - ۱$ باشد، سپس تعیین کنید این دو دایره چند مماس مشترک داخلی دارند؟

۷ در چهارضلعی $ABCD$، $AB + CD = AD + BC$ است. ثابت کنید که این چهارضلعی محیطی است.

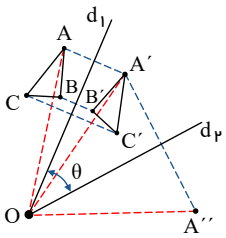


۸ در تجانسی با نسبت $k < ۰$ و مرکز تجانس O (نقطهٔ O را خارج AB در نظر بگیرید) نشان دهید:

الف) تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

ب) تجانس زاویهٔ بین خطوط را حفظ می‌کند.

www-kanoon-ir



۹ در شکل، دو خط d_1 و d_2 با زاویهٔ θ یکدیگر را قطع کرده‌اند. مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ بنامید.

الف) نشان دهید: $A\hat{O}A'' = 2\theta$

ب) اندازهٔ $C\hat{O}C''$ و $B\hat{O}B''$ چقدر است؟

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ را تصویر $\overset{\Delta}{ABC}$ دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

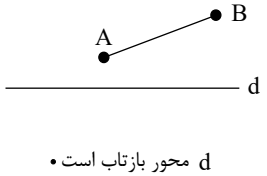
۱۰ یک ذوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعدهٔ آن ضرب در میانگین هندسی آنها.

۱۱ تحت تبدیل تجانس به مرکز $(۰,۰)$، نقطهٔ $A(۱,۲)$ روی نقطهٔ $A'(۳,۶)$ تصویر شده است. نسبت تجانس را یافته و تعیین کنید این تجانس، انبساط است یا انقباض؟

۱۲ در مثلثی به طول اضلاع ۷ و ۳و۵ واحد، دایرهٔ محاطی خارجی بر ضلع متوسط و امتداد دو ضلع دیگر مماس است. نقطهٔ تماس، ضلع متوسط را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

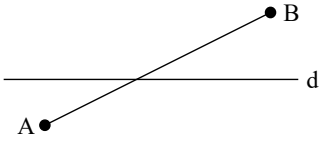
۱۳ ثابت کنید بازتاب محوری یک تبدیل طولپا است. (مسئله را در دو حالت زیر بررسی کنید)

الف



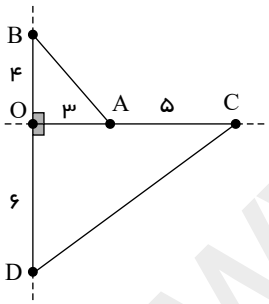
d محور بازتاب است •

ب



d محور بازتاب است •

۱۴ مطابق شکل، با ترکیب کدام تبدیل‌ها، مثلث OAB بر مثلث OCD تصویر می‌شود؟

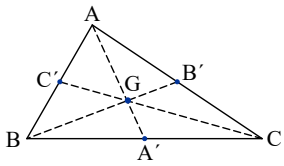


www-kanoon-ir

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ می‌دانیم که محل همرسی میانه‌ها، هر میانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند. داریم:

$$\frac{GA'}{GA}=\frac{۱}{۲} \quad , \quad \frac{GB'}{GB}=\frac{۱}{۲} \quad , \quad \frac{GC'}{GC}=\frac{۱}{۲}$$



بنابراین، A' , B' , C' مجانس‌های A و B و C به مرکز G و نسبت $k=-\frac{۱}{۲}$ می‌باشند.

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=k^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}=\frac{۱}{۴}S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

۲

الف) طبق شکل داریم:

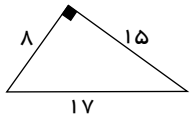
$$\begin{cases}\frac{x+y}{۲}=۷۰^\circ\\ \frac{x-y}{۲}=۵۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۱۲۰^\circ\\ y=۲۰^\circ\end{cases}$$

ب) طبق روابط طولی داریم:

$$z(z-۲)=۴\times۱۲\Rightarrow z^۲-۲z-۴۸=۰\Rightarrow z=-۶ \text{ غ.ق.ق} \quad , \quad z=۸ \text{ ق.ق}$$

۳ اعداد ۸ و ۱۵ و ۱۷ اعداد فیثاغورسی هستند: $۱۷^۲=۱۵^۲+۸^۲$

پس مثلث داده‌شده قائم‌الزاویه است و شعاع دایرهٔ محاطی آن برابر است با:



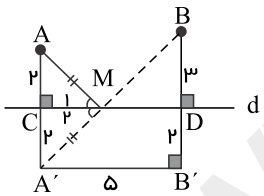
$$r=\frac{S}{P}=\frac{\frac{۱}{۲}\times۸\times۱۵}{\frac{۱۷+۱۵+۸}{۲}}=\frac{۸\times۱۵}{۴۰}=۳$$

۴

مطابق شکل کوتاه‌ترین مسیر AMB است.

بازتاب A نسبت به d، A' است.

به این ترتیب مسیر AMB، همان $A'B$ است. داریم:



$$A'B^۲=۵^۲+۵^۲\Rightarrow A'B=\sqrt{۵۰}\Rightarrow A'B=۵\sqrt{۲}$$

۵

$$r_a=\frac{S}{P-a}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}{\frac{۳}{۲}a-a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۸\sqrt{۳}=۱۲$$

۶

$$TT'=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}\Rightarrow ۳a-۱=\sqrt{۱۰۰-۳۶}=۸\Rightarrow a=۳$$

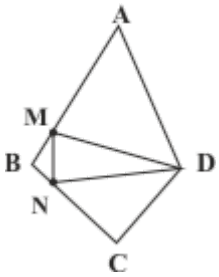
این دو دایره یک مماس مشترک داخلی دارند، زیرا مماس برون هستند. $(d=R+R')$

۷ اگر روی ضلع AB نقطهٔ M را طوری انتخاب کنیم که $AM=AD$ و اگر روی ضلع BC نقطه N را طوری انتخاب کنیم که $DC=CN$ باشد در این صورت مثلث‌های ADM, DCN متساوی‌الساقین هستند.

ضمناً با توجه به فرض مسأله داریم:

www-kanoon-ir

$$AB+CD=AD+BC \Rightarrow AM+MB+CD=AD+BN+CN$$



چون $DC=CN$, $AM=AD$ می‌باشد پس $MB=BN$ می‌باشد.

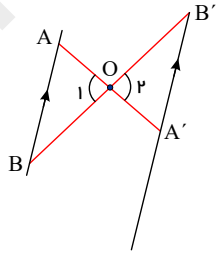
بنابراین مثلث BMN نیز متساوی‌الساقین است.

اگر عمودمنصف‌های مثلث DMN را رسم کنیم همدیگر را در نقطه‌ای مانند I قطع می‌کنند از طرفی عمودمنصف‌های اضلاع DM , MN , DN نقش نیمسازهای زوایای $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ را نیز دارند پس طبق ویژگی مکان هندسی نیمساز، فاصلهٔ نقطهٔ I از همهٔ اضلاع AD , AB , BC , DC مساوی است. بنابراین نقطه I مرکز دایره محاطی این چهارضلعی است پس این چهارضلعی محیطی است.

۸ الف) چون $k<0$ است، پس به شکل زیر می‌باشد.

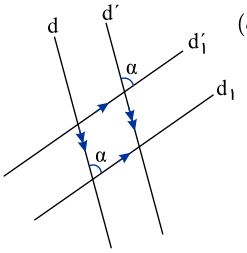
$$OA'=k\times OA, OB'=k\times OB$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OB}=\frac{OA'}{OB'}, \hat{O}_1=\hat{O}_2$$



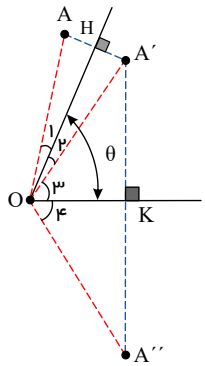
$A\hat{O}B \overset{\Delta}{\sim} A'\hat{O}B' \Rightarrow \hat{B}'=\hat{B}, \hat{A}'=\hat{A} \Rightarrow AB \parallel A'B'$:تناسب دو ضلع و تساوی زاویهٔ بین

ب) اگر زاویهٔ بین دو خط متقاطع برابر با α باشد، از آنجا که مجانس خط با آن خط موازی می‌باشد، پس زاویهٔ بین مجانس‌های دو خط همان زاویه بین دو خط (α) می‌باشد.



۹ الف) بازتاب، اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند. داریم:

$$\begin{cases} A \text{ بازتاب } A' \Rightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_2 \\ A' \text{ بازتاب } A'' \Rightarrow \hat{O}_3=\hat{O}_4 \end{cases} \Rightarrow A\hat{O}A''=2(\hat{O}_2+\hat{O}_3)=2\theta$$



ب) به همین ترتیب داریم:

$$B\hat{O}B''=C\hat{O}C''=2\theta$$

پ) از آنجا که داریم:

$$OA=OA'', A\hat{O}A''=2\theta$$

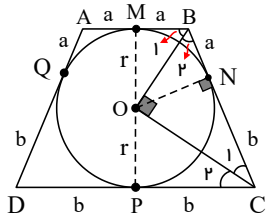
پس A'' دوران‌یافتهٔ A به مرکز O و زاویهٔ 2θ می‌باشد. پس $A''\overset{\Delta}{B''}C''$ دوران‌یافتهٔ $A\overset{\Delta}{B}C$ به مرکز O و زاویهٔ 2θ می‌باشد.

۱۰ ذوزنقهٔ محاطی، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین می‌باشد.

$$\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow \hat{B}_2+\hat{C}_1=\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}=90^\circ$$

$$\Rightarrow B\hat{O}C=90^\circ , \hat{N}=90^\circ \Rightarrow ON^2=a\times b \Rightarrow r^2=ab$$

www-kanoon-ir



$$\Rightarrow r=\sqrt{ab}=\sqrt{\frac{AB}{۲}\times\frac{CD}{۲}}=\frac{۱}{۲}\sqrt{AB\times CD}=\frac{۱}{۲}MP$$

$$S_{ABCD}=\frac{AB+CD}{۲}\times MP=\frac{AB+CD}{۲}\times\sqrt{AB\times CD}$$

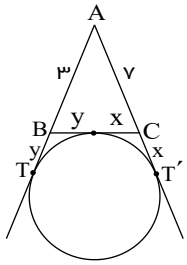
۱۱

$$A(۱,۲)\to A'(۳,۶)\Rightarrow k=\frac{OA'}{OA}=\frac{\sqrt{۳^۲+۶^۲}}{\sqrt{۱^۲+۲^۲}}=\frac{۳\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=۳$$

تجانس، انبساط است زیرا $k>۱$ است.

۱۲ با توجه به اینکه $AT=AT'$ است، داریم: $۳+y=x+۷$

و همچنین $BC=۵$ در نتیجه $x+y=۵$ بنابراین:

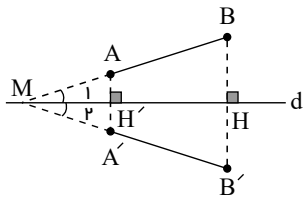


$$\begin{cases}x+y=۵\\y-x=۴\end{cases}\Rightarrow y=\frac{۹}{۲},\ x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۹}{۲}}=\frac{۱}{۹}$$

۱۳

الف امتداد AB، خط d را در نقطهٔ M قطع می‌کند. نقطهٔ B را نسبت به محور d بازتاب می‌کنیم تا B' به‌دست آید. MB' را رسم می‌کنیم. بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d را پیدا می‌کنیم و ثابت می‌کنیم نقطه A' می‌باشد، به‌طوری که A' روی MB' قرار می‌گیرد. مثلث‌های MBB' و MAA' متساوی‌الساقین هستند، زیرا:

$$\begin{cases}\hat{H}=۹۰^\circ, BH=B'H\Rightarrow BB' \text{ عمودمنصف } d\Rightarrow MB=MB' \quad (۱)\\ \hat{H}'=۹۰^\circ, AH'=A'H'\Rightarrow AA' \text{ عمودمنصف } d\Rightarrow MA=MA' \quad (۲)\end{cases}$$



از طرفی می‌دانیم که در مثلث متساوی‌الساقین، عمودمنصف d، نیمساز زاویهٔ M می‌باشد، پس $\hat{M}_۱=\hat{M}_۲$ و درنتیجه، A' روی MB' قرار دارد.

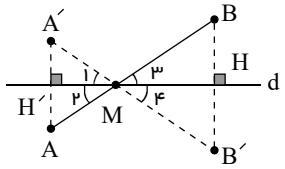
از طرفی از موارد (۱) و (۲) داریم:

$$MB=MB', MA=MA'\Rightarrow MB-MA=MB'-MA'\Rightarrow AB=A'B'$$

بنابراین در این حالت، بازتاب طولپا می‌باشد.

ب پاره‌خط AB محور بازتاب d را در نقطهٔ M قطع می‌کند. بازتاب A نسبت به خط d، نقطهٔ A' می‌باشد. MA' را رسم کرده و امتداد می‌دهیم و ادعا می‌کنیم بازتاب نقطهٔ B نسبت به خط d، یعنی نقطهٔ B' بر امتداد MA' واقع است. چون نقطهٔ A' بازتاب A نسبت به خط d می‌باشد، داریم:

$$\hat{H}'=۹۰^\circ, AH'=A'H'\Rightarrow AA' \text{ عمودمنصف } d\Rightarrow MA=MA', \hat{M}_۱=\hat{M}_۲$$



از طرفی داریم:

$$\begin{cases}\hat{M}_۱=\hat{M}_۲=\hat{M}_۳=\hat{M}_۴\\ BH=B'H, \hat{H}=۹۰^\circ\end{cases}$$

پس B' در امتداد MA' قرار دارد و همچنین مثلث MBB' متساوی‌الساقین خواهد بود. بنابراین:

$$\begin{cases}AB=AM+MB\\ A'B'=A'M+MB'\\ AM=A'M, BM=B'M\end{cases}\Rightarrow AB=A'B'$$

بنابراین، بازتاب پاره‌خط AB نسبت به خط d، پاره‌خط $A'B'$ است و بازتاب طولپا می‌باشد.

۱۴ ابتدا به مرکز O و زاویهٔ -۹۰°، مثلث OAB را دوران می‌دهیم تا مثلث $OA'B'$ به‌دست آید. حال مجانس

www.k-kanoon.ir

$\overset{\triangle}{OA'B'}$ به مرکز O و نسبت تجانس ۲ $= \frac{OD}{OA'} = \frac{OC}{OB'} = k$ را به‌دست می‌آوریم تا مثلث OCD به‌دست آید.

