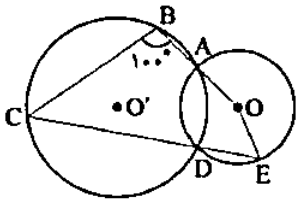
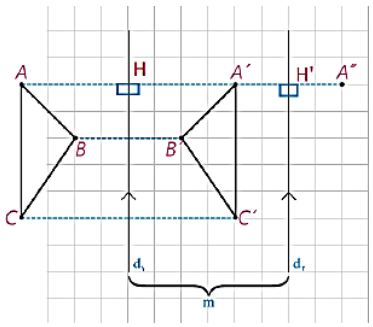
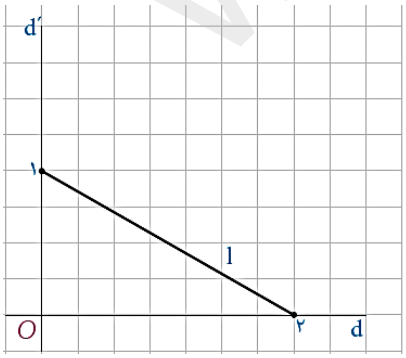
سؤال امتحانی : نوبت دوم درس : هندسه ۲ پایه : یازدهم رشته : ریاضی نام و نام خانوادگی : کلاس : ۱۱/۱	وزارت آموزش و پرورش اداره‌ی کل آموزش و پرورش استان مازندران مدیریت آموزش و پرورش شهرستان بابل دبیرستان فرزانگان متوسطه دوم طراح : زهرا علی زاده	تاریخ امتحان : ۱۴۰۲/۰۲/۳۰ مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه ساعت امتحان : ۱۰ صبح تعداد صفحات : ۴ نمره : محل مهر آموزشگاه

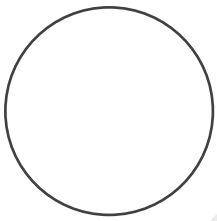
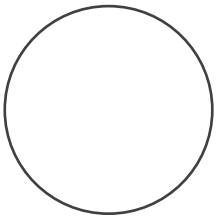
نازنینم ؛ با نام و یاد خداوند پی همتا و با تکیه بر دانش خود، به سوالات زیر پاسخ تشریحی کامل و دقیق بده

سوال	شرح سوال	بارم
۱.	ثابت کنید اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه.	۱/۵
۲.	از نقطه P در خارج دایره ای، مماس PA به طول $4\sqrt{15}$ را بر آن رسم کرده ایم. (A روی دایره است.) همچنین خط راستی از P گذرانده ایم که دایره را در دو نقطه B و C قطع کرده است و $BC = 8$. طول های PB و PC را به دست آورید.	۱
۳.	یک چهار ضلعی محیطی است اگر و تنها اگر : ۱- ۲-	۰/۵

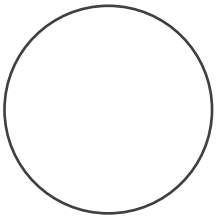
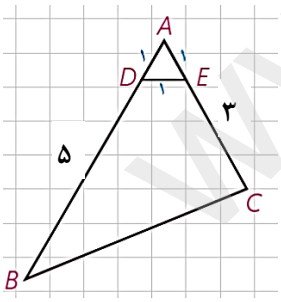
www-kanoon-ir

۴.	مطابق شکل دو دایره به مراکز O و O' در نقاط A و D متقاطع اند و چهارضلعی $OBCE$ چنان است که نقاط A و D روی اضلاع آن قرار دارد و $\hat{B} = ۱۰۰^o$ است. اندازه زاویه AOE چند درجه است؟ 	۲
۵.	نقطه ثابت تبدیل را تعریف کنید.	۱
۶.	در شکل، $d_۱$ به موازات $d_۲$ و به فاصله m از آن قرار دارد و مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط $d_۱$ است. اگر بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط $d_۲$ رسم کرده و $A''B''c''$ بنامیم، با چه تبدیلی می توان آن را تصویر ABC دانست؟ چرا؟ 	۱
۷.	در شکل روبرو اگر خط l را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{۸}{۵}$ تصویر کنیم و آن را l' بنامیم، مساحت بین خط l و l' و خطوط d و d' چقدر است؟ 	۲

www-kanoon-ir

۸.	از بین همه ذوزنقه هایی با قاعده های به طول ۵ و ۷ که در قاعده به طول ۷ مشترک هستند و دارای مساحت ۲۴ می باشند، کمترین محیط ممکن را بدست آورید.	۲
۹.	در یک n ضلعی منتظم هیچ یک از محورهای تقارن آن، قطر چندضلعی نمی باشد و داریم $n^۲ - ۱۹\,n + ۸۴ = ۰$. تعداد کل تقارن های خطی و دورانی این چندضلعی را بدست آورید.	۱
۱۰.	قضیه سینوس ها را در حالت غیر قائمه ($\hat{A} \neq ۹۰^o$) اثبات کنید.  	۲

www-kanoon-ir

۱۱.	قضیه استوارت را بیان و اثبات کنید.	۲/۵
۱۲.	ثابت کنید در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می کند. 	۱/۵
۱۳.	در شکل مقابل، ۱) طول BC را بدست آورید. ۲) مساحت چهارضلعی $DECB$ را بیابید. 	۱
۱۴.	اگر در مثلث ABC داشته باشیم $۴S = a^۲ + b^۲ - c^۲$ ، آن گاه اندازه زاویه C چند درجه است ؟	۱

www-kanoon-ir

خداقوت دوست خوبم

سؤال امتحانی : نوبت دوم درس : هندسه ۲ پایه : یازدهم رشته : ریاضی نام و نام خانوادگی : کلاس : ۱۱/۱	وزارت آموزش و پرورش اداره‌ی کل آموزش و پرورش استان مازندران مدیریت آموزش و پرورش شهرستان بابل دبیرستان فرزانگان متوسطه دوم طراح : زهرا علی زاده	تاریخ امتحان : ۱۴۰۲/۰۲/۳۰ مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه ساعت امتحان : ۱۰ صبح تعداد صفحات : نمره : محل مهر آموزشگاه

سوال		بارم
۱.	ثابت کنید اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه. ۱ــ در شکل مقابل $\overset{\frown}{ADB}$ یک زاویهٔ محاطی است که یک ضلع آن از مرکز دایره عبور کرده است. ــ اگر از B به O وصل کنیم، زاویهٔ AOB یک زاویهٔ خارجی برای مثلث متساوی الساقین OBD است. بنابراین : $\overset{\frown}{AOB}=\overset{\frown}{ODB}+\overset{\frown}{OBD}=۲\overset{\frown}{ODB}$ و از آن نتیجه می‌شود : $\overset{\frown}{ODB}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AOB}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}$. ۲ــ در این شکل $\overset{\frown}{ADB}$ یک زاویهٔ محاطی است که دو ضلع آن در دو طرف O واقع شده‌اند. ــ اگر قطر DE را رسم کنیم طبق قسمت ۱ داریم : $\left.\begin{matrix}\overset{\frown}{ADE}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AE}\\ \overset{\frown}{EDB}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BE}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\overset{\frown}{ADB}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AE}+\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BE}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}$ ۳ــ در این شکل $\overset{\frown}{ADB}$ یک زاویهٔ محاطی است که دو ضلع آن در یک طرف O واقع شده‌اند. ــ اگر قطر DE را رسم کنیم، طبق قسمت ۱ داریم : $\left.\begin{matrix}\overset{\frown}{ADE}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AE}\\ \overset{\frown}{BDE}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BE}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\overset{\frown}{ADB}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AE}-\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BE}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}$ بنابراین : **قضیه:** اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر است با نصف اندازهٔ کمان مقابل به آن زاویه.	۱/۵
۲.	از نقطه P در خارج دایره ای، مماس PA به طول $۴\sqrt{۱۵}$ را بر آن رسم کرده ایم. (A روی دایره است.) همچنین خط راستی از P گذرانده ایم که دایره را در دو نقطه B و C قطع کرده است و $BC=۸$. طول های PB و PC را به دست آورید. $AP^۲=BP.PC$ $\rightarrow ۲۴۰=x(x+۸)$ $x^۲+۸x-۲۴۰=۰$ $(x-۱۲)(x+۲۰)=۰$ $\rightarrow \boxed{x=۱۲}$ ، $x=-۲۰$ غ ق ق $\Rightarrow BP=۱۲$ ، $PC=۲۰$	۱
۳.	یک چهار ضلعی محیطی است اگر و تنها اگر : ۱- ۲-	۰/۵

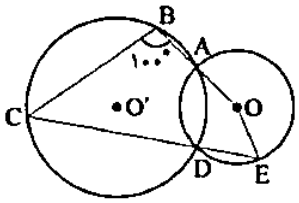
www.karnoon-ir

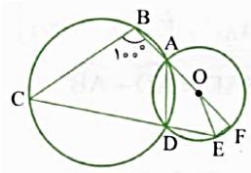
بنابراین؛ یک چند ضلعی، محیطی است اگر و فقط اگر همه نیمسازهای زاویه‌های آن در یک نقطه همرس باشند.این نقطه مرکز دایره محاطی چند ضلعی است.

قضیه: یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر باشند.

۴. (۲)

مطابق شکل دو دایره به مراکز O و O' در نقاط A و D متقاطع اند و چهارضلعی $OBCE$ چنان است که نقاط A و D روی اضلاع آن قرار دارد و $\hat{B} = ۱۰۰^o$ است. اندازه زاویه AOE چند درجه است؟





پس $A\hat{D}E = \hat{B} = ۱۰۰^\circ$. همچنین چهارضلعی ABCD محاطی است، محاطی‌بودن چهارضلعی ADEF نتیجه می‌دهد که $\hat{F} = ۱۸۰^\circ - A\hat{D}E = ۸۰^\circ$.

اما مثلث OEF متساوی‌الساقین است $(OE = OF)$، پس $O\hat{E}F = ۸۰^\circ$ و نهایتاً $A\hat{O}E = O\hat{E}F + \hat{F} = ۲ \times ۸۰^\circ = ۱۶۰^\circ$.

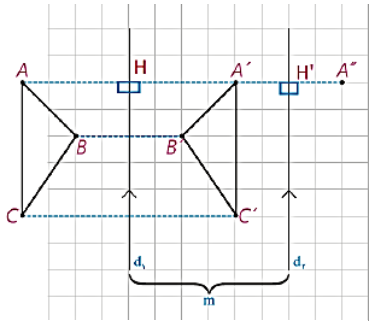
۵. (۱)

نقطه ثابت تبدیل را تعریف کنید.

تعریف: در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل‌یافتهٔ آن بر خود آن نقطه منطبق می‌شود، **نقطهٔ ثابت تبدیل** می‌نامند.

۶. (۱)

در شکل، $d_۱$ به موازات $d_۲$ و به فاصله m از آن قرار دارد و مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط $d_۱$ است. اگر بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط $d_۲$ رسم کرده و $A''B''C''$ بنامیم، با چه تبدیلی می توان آن را تصویر ABC دانست؟ چرا؟

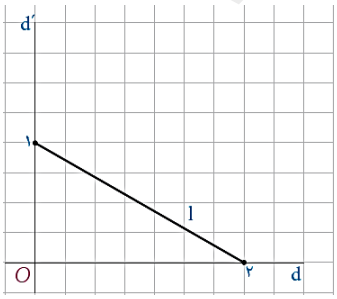


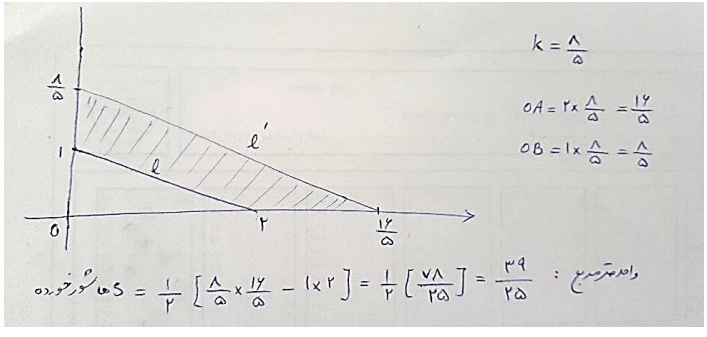
با انتقالی تحت بردار انتقالی که اندازهٔ آن دوبرابر فاصله ی بین دو خط بازتاب $d_۱$ و $d_۲$ یعنی $۲m$ و راستای آن عمود بر این دو خط است ، می توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ دانست.

نتیجه می گیریم ، ترکیب دو بازتابی که محور های بازتاب موازی یکدیگر هستند یک انتقال است.

۷. (۲)

در شکل روبرو اگر خط l را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{۸}{۵}$ تصویر کنیم و آن را l' بنامیم، مساحت بین خط l و l' و خطوط d و d' چقدر است؟





۸. (۲)

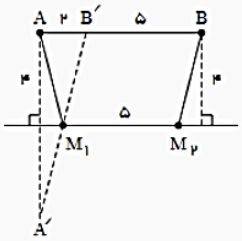
از بین همه ذوزنقه هایی با قاعده های به طول ۵ و ۷ که در قاعده به طول ۷ مشترک هستند و دارای مساحت ۲۴ می باشند، کمترین محیط ممکن را بدست آورید.

www-kanoon.ir

این مسأله را می‌توان در قالب مسأله کوتاه‌ترین مسیر هرون حل کرد. کافیست طول کوتاه‌ترین مسیر AM_1M_2B را تعیین کنیم که مسیر M_1M_2 روی خطی به موازات خط AB قرار دارد و طول آن ۵ می‌باشد. فاصلهٔ نقاط B و A از این خط همان ارتفاع ذوزنقه است که با استفاده از مساحت به دست می‌آید.

$$\frac{1}{2}(5+7)\times h = 24 \Rightarrow h = 4$$

کافیست کم‌ترین مقدار $AM_1 + BM_2$ را تعیین کنیم:



کمترین مقدار برای $AM_1 + BM_2$

$$= AM_1 + M_1B' = A'M_1 + M_1B' = A'B' = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$\Rightarrow \text{کمترین محیط ذوزنقه} = 5 + 7 + 2\sqrt{17} = 12 + 2\sqrt{17}$$

---

۹. در یک n ضلعی منتظم هیچ یک از محورهای تقارن آن، قطر چندضلعی نمی باشد و داریم $n^2 - 19n + 84 = 0$. تعداد کل تقارن های خطی و دورانی این چندضلعی را بدست آورید. ۱

چون هیچ‌یک از محورهای تقارن nضلعی منتظم قطر آن نیستند، پس n فرد است و داریم:

$$n^2 - 19n + 84 = 0 \Rightarrow (n-7)(n-12) = 0$$

$$\Rightarrow n = 7 \quad \text{یا} \quad n = 12$$

چون n فرد است لذا $n = 7$ قابل‌قبول است و تعداد کل تقارن‌های خطی و دورانی هفت‌ضلعی منتظم ۱۴ است.

---

۱۰. قضیه سینوس ها را در حالت غیر قائمه ($\hat{A} \neq 90^o$) اثبات کنید. ۲

مثلث دلخواه ABC ($\hat{A} < 90^\circ$) و دایرهٔ محیطی آن به مرکز O را در نظر می‌گیریم.

قطر BD را رسم، و D را به A وصل می‌کنیم. ($BD = 2R$)

۱ـ زوایای $\hat{C}$ و $\hat{D}$ چرا با هم برابرند؟

این دو زاویه محاطی هستند و هردو روبه رو به کمان $\overset{\frown}{AB}$ هستند پس هم اندازه اند.

اندازهٔ آنها برابر است با نصف کمان $\overset{\frown}{AB}$.

۲ـ چرا مثلث ABD در رأس A قائم‌الزاویه است؟

زیرا زاویهٔ A محاطی روبه رو به قطر دایره است. $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{2} = \frac{180^\circ}{2}$

۳ـ با توجه به دو قسمت قبل، داریم :

$$\text{SinC} = \text{SinD} \text{ و } \text{SinD} = \frac{c}{BD} \Rightarrow \text{SinC} = \frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\text{SinC}} = 2R$$

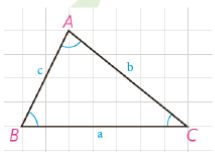
نتیجه

در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازهٔ هر ضلع به سینوس زاویهٔ روبه‌رو به آن برابر است با طول قطر دایرهٔ محیطی مثلث.

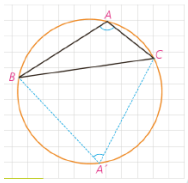
قضیهٔ سینوس‌ها: در مثلث ABC با اضلاع $BC=a$ ، $AC=b$ و $AB=c$ داریم:

$$\frac{a}{\text{SinA}} = \frac{b}{\text{SinB}} = \frac{c}{\text{SinC}} = 2R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.



۵ـ حال مثلث ABC ($\hat{A} > 90^\circ$) را در نظر بگیرید. نقطهٔ دلخواه A' روی کمان BC را به B و C وصل می‌کنیم. زوایای $\hat{A}$ و $\hat{A}'$ نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟



این دو زاویه مکمل هم هستند.

راه اول : چهارضلعی ABA'C محاطی است پس بنا بر قضیه زوایای مقابل مکمل هستند.

راه دوم:

$$\left.\begin{aligned}\hat{A} &= \frac{\overset{\frown}{BA'C}}{2}\\ \hat{A}' &= \frac{\overset{\frown}{BAC}}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{A}' = \frac{\overset{\frown}{BA'C}}{2} + \frac{\overset{\frown}{BAC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BA'C}+\overset{\frown}{BAC}}{2} = \frac{360^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{A}' = 180^\circ$$

$\hat{A}+\hat{A}' = 180^\circ$ بنابراین $\hat{A}'$ زاویه‌ای حاده است.

با توجه به آنچه از مثلثات می‌دانید، جاهای خالی را پر کنید :

$$\sin A = \sin(180^\circ - A') = \sin A'$$

در مثلث $A'BC$، طبق نتیجهٔ قسمت (۳) می‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{a}{\sin A'} = 2R \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$$

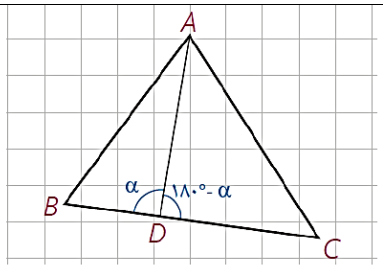
طول قطر برابر با $2R$ است.

---

۱۱. قضیه استوارت را بیان و اثبات کنید. ۲/۵

در مثلث ABC، نقطهٔ دلخواه D روی BC مفروض است. (قضیهٔ استوارت)

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$$



$$\overset{\Delta}{ABD}: AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2AD.DB.\cos\alpha$$

$$\xrightarrow{\times DC} AB^2.DC = DC.AD^2 + DC.DB^2 - 2DC.AD.DB.\cos\alpha \quad (1)$$

$$\overset{\Delta}{ACD}: AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD.DC.\cos(180^\circ - \alpha)$$

$$\xrightarrow{\times DB} AC^2.DB = DB.AD^2 + DB.DC^2 + 2DB.AD.DC.\cos\alpha \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)+(2)} AB^2.DC + AC^2.DB = DC.AD^2 + DC.DB^2 - 2DC.AD.DB.\cos\alpha + DB.AD^2 + DB.DC^2 + 2DB.AD.DC.\cos\alpha$$

$$\Rightarrow AB^2.DC + AC^2.DB = AD^2(\underbrace{DC + DB}_{BC}) + BD.DC(\underbrace{DC + DB}_{BC})$$

$$\Rightarrow AB^2.DC + AC^2.DB = AD^2.BC + DB.DC.BC$$

۱۲. ثابت کنید در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می کند. — ۱/۵

در مثلث ABC برای محاسبهٔ طول نیمساز داخلی زاویهٔ $\hat{A}$ ($\hat{A}_1 = \hat{A}_2$)، یعنی AD، AD را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را در E قطع کند و E را به C وصل می‌کنیم.

الف) چرا $\hat{E} = \hat{B}$؟

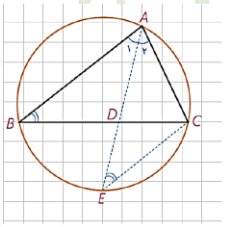
زیرا این دو زاویه هردو محاطی هستند و روبه رو به یک کمان (کمان AC) هستند.

ب) چرا مثلث‌های ABD و AEC متشابه‌اند؟

$\left.\begin{matrix}\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{B} = \hat{E}\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ق اول تشابه}} \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{AEC}$

پ) نسبت‌های اضلاع متناظر آنها را بنویسید.

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{CE}{BD}$$



ت) از تناسب اول نتیجه می‌گیریم :

$$AB.AC = AD.AE = AD(AD+DE) = AD^2 + AD.DE$$

و چون $AD.DE = BD.DC$ (چرا؟)

دو وتر AE و BC یکدیگر را در نقطهٔ D درون دایره قطع کرده اند بنا بر قضیه داریم : $AD.DE = DB.DC$

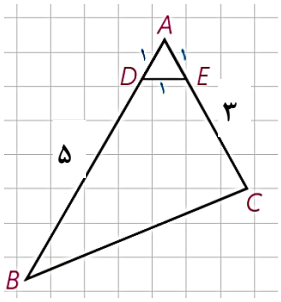
بنابراین : $AD^2 = AB.AC - BD.DC$

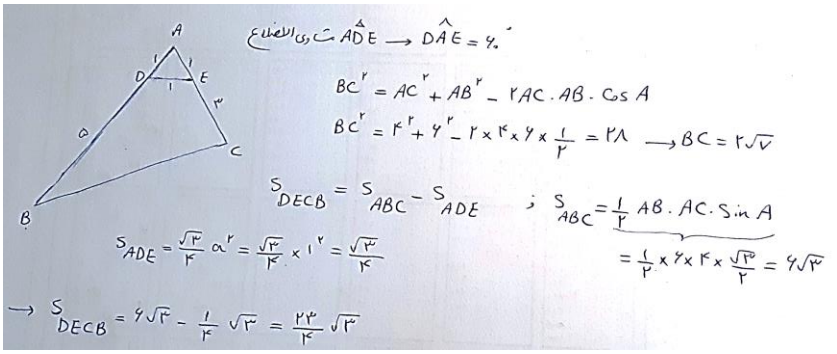
قضیهٔ ۲: در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل‌ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل‌ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

۱۳. در شکل مقابل، — ۱

۱) طول BC را بدست آورید.

۲) مساحت چهارضلعی $DECB$ را بیابید.





۱۴. اگر در مثلث ABC داشته باشیم $4S = a^2 + b^2 - c^2$ ، آن گاه اندازه زاویه C چند درجه است ؟ — ۱

به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$4S = a^2 + b^2 - c^2 \Rightarrow 4S = a^2 + b^2 - (a^2 + b^2 - 2ab\cos C) \Rightarrow 4S = 2ab\cos C$$

$$\Rightarrow 4\times\frac{1}{2}ab\sin C = 2ab\cos C$$

$$\Rightarrow \tan C = 1 \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ$$