بسمه تعالی

آموزش و پرورش منطقه ۵ تهران
دبیرستان دوره دوم پویندگان
آزمون پایان ترم اول

درس: آمار و احتمال
پایه: یازدهم (رشته ریاضی)
تاریخ آزمون: ۱۴۰۲/۱۰/۰۲
مدت زمان آزمون: ۱۰۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی: کلاس:

سوال:	بارم
۱- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (با علامت ☑ یا ☒ مشخص کنید) الف) ارزش گزاره‌ی «$\left(\frac{-۱}{۲}>\frac{-۱}{۳}\right)\Leftrightarrow\left(\sqrt{۲}\in\square\right)$» درست است. ☐ ب) یک مجموعه‌ی ۳ عضوی دارای ۶ افراز مختلف است. ☐ ج) اگر p گزاره‌ای همواره نادرست باشد، ارزش گزاره‌ی «$(p\wedge q)\Rightarrow r$» همواره نادرست است. ☐ د) اگر $A\subseteq B$ آن‌گاه $A\Delta B=B-A$. ☐	۱
۲- جاهای خالی را با اعداد یا کلمات مناسب پر کنید. الف) ارزش یک گزاره‌ی کلی (با سور عمومی) هنگامی درست است که ..... . ب) در هر گزاره‌نما به مجموعه‌ی مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای گزاره‌نما قرار داد تا اینکه گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، ..... می‌گویند. ج) مجموعه جواب گزاره‌نمای $\frac{۱}{x}=x$ $(D=\square)$ عبارت است از $\{.....\}=S$. د) اگر مجموعه‌ی A سه عضوی باشد، مجموعه‌ی $P(A)$ دارای ..... زیرمجموعه است. ه) مجموعه‌ی $A=\{a,b,c,d,e\}$ دارای ..... زیرمجموعه‌ی دو عضوی است. و) حاصل عبارت $(A-M')\cup(A'\cap\varnothing)$ برابر است با	۱/۵
۳- به سؤالات چهارگزینه‌ای زیر پاسخ دهید. (فقط گزینه‌ی صحیح را انتخاب کنید. نوشتن جواب تشریحی لازم نیست.) الف) گزاره‌ی«بعضی از اعداد صحیح به گونه‌ای هستند که یا معکوس آن‌ها صحیح است یا جذر آن‌ها طبیعی است» به زبان ریاضی کدام یک از گزینه‌های زیر است؟ ۱) $\exists x\in\square\ ;\ \left(\frac{۱}{x}\in\square\right)\vee\left(x^{۲}\in\square\right)$ ۲) $\exists x\in\square\ ;\ \left(\frac{۱}{x}\in\square\right)\vee\left(\sqrt{x}\in\square\right)$ ۳) $\forall x\in\square\ ;\ \left(\frac{۱}{x}\in\square\right)\vee\left(\sqrt{x}\in\square\right)$ ۴) $\exists x\in\square\ ;\ \left(\frac{۱}{x}\in\square\right)\wedge\left(\sqrt{x}\in\square\right)$ ب) تعداد افرازهای دو تایی (دو قسمتی) مجموعه‌ی $A=\{a,b,c,d\}$ چند تاست؟ ۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۶ ۴) ۷	۱

www.k-anoon.ir

۱/۵	۴- به کمک جدول ارزش گزاره‌ها، هم‌ارزی مقابل را ثابت کنید: $(p \Rightarrow \neg q) \wedge q \equiv \neg (q \Rightarrow p)$ |						| |---|---|---|---|---|---|---| |						| |						| |						| |						| |							
۱	۵- بدون استفاده از جدول و به کمک قوانین جبر گزاره‌ها، هم‌ارزی زیر را ثابت کنید: $(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv T$
۱	۶- به کمک قوانین جبر گزاره‌ها، گزاره‌ی زیر را ساده کنید: $\neg (p \Rightarrow q) \vee (q \wedge p) \equiv$
۱/۵	۷- عبارت «$\exists x \in \mathbb{R} \; ; \; x^3 < \frac{1}{x}$» را در نظر بگیرید؛ الف) عبارت کلامی متناسب با آن را بنویسید. ب) ارزش آن را با ذکر دلیل تعیین کنید. ج) نقیض آن را به زبان ریاضی بنویسید.
۱	۸- سه مجموعه‌ی A و B و C مثال بزنید که دارای شروط زیر باشند: $A \in B \;,\; B \in C \;,\; A \subseteq C$
۱	۹- مجموعه‌ی توانی $A = \{\varnothing \;,\; \{\varnothing\} \;,\; ۲\}$ را با اعضا بنویسید.
۱	۱۰- مجموعه‌ی A دارای ۶۲ زیرمجموعه‌ی محض ناتهی است. تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی A چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی آن است؟
۱/۵	۱۱- اگر به مجموعه‌ای دو عضو جدید اضافه کنیم به تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی آن ۱۵ تا اضافه می‌شود. تعداد کل زیرمجموعه‌های این مجموعه چندتاست؟
۱	۱۲- چهار افراز مختلف برای مجموعه‌ی $A = \{۱ \;,\; ۲ \;,\; ۳ \;,\; ۴\}$ بنویسید.

www-kanoon-ir

۱۳- دو مجموعه‌ی $B=\{\{a-۷\},b+۱,\{۳b+۱,a-۱\}\}$ و $A=\{a-۲,\{b+۲,c+۸\},\{۲b-۶\}\}$ مساوی هستند. مقادیر a، b و c را بدست آورید.	۱/۵
۱۴- به روش عضوگیری دلخواه ثابت کنید: اگر $A\subseteq B$ آن‌گاه $B'\subseteq A'$	۱
۱۵- خاصیت توزیع‌پذیری اشتراک نسبت به اجتماع را بنویسید و به کمک تعاریف و قوانین جبر گزاره‌ها آن را ثابت کنید.	۱/۵
۱۶- به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: $A-(B\cup C)=(A-B)-C$	۱
۱۷- عبارت زیر را به کمک جبر مجموعه‌ها تا حد امکان ساده کنید: $(A\cap B')\cup[(A\cap B)-A']\cap(A\cup B)=$	۱

موفق و سربلند
باشید...

نمره به عدد:	نمره به حروف:
نام و نام خانوادگی دبیر:	تاریخ/امضاء:

www-kanoon-ir

پاسخنامه تشریحی	بارم
۱- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (با علامت ☑ یا ☒ مشخص کنید) الف) ارزش گزاره‌ی «$\left(\frac{-۱}{۲}>\frac{-۱}{۳}\right)\Leftrightarrow\left(\sqrt{۲}\in\square\right)$» درست است. ☑ ب) یک مجموعه‌ی ۳ عضوی دارای ۶ افراز مختلف است. ☒ ج) اگر p گزاره‌ای همواره نادرست باشد، ارزش گزاره‌ی «$(p\wedge q)\Rightarrow r$» همواره نادرست است. ☒ د) اگر $A\subseteq B$ آن‌گاه $A\Delta B=B-A$. ☑	۱
۲- جاهای خالی را با اعداد یا کلمات مناسب پر کنید. الف) ارزش یک گزاره‌ی کلی (با سور عمومی) هنگامی درست است که ..... ب) در هر گزاره‌نما به مجموعه‌ی مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای گزاره‌نما قرار داد تا اینکه گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، ..... می‌گویند. ج) مجموعه جواب گزاره‌نمای $\frac{۱}{x}=x$ $(D=\square)$ عبارت است از $S=\{....\}$. د) اگر مجموعه‌ی A سه عضوی باشد، مجموعه‌ی $P(A)$ دارای ..... زیرمجموعه است. ه) مجموعه‌ی $A=\{a,b,c,d,e\}$ دارای ..... زیرمجموعه‌ی دو عضوی است. و) حاصل عبارت $(A-M')\cup(A'\cap\varnothing)$ برابر است با	۱/۵

۳- به سؤالات چهارگزینه‌ای زیر پاسخ دهید. (فقط گزینه‌ی صحیح را انتخاب کنید. نوشتن جواب تشریحی لازم نیست.)

الف) گزاره‌ی«بعضی از اعداد صحیح به گونه‌ای هستند که یا معکوس آن‌ها صحیح است یا جذر آن‌ها طبیعی است» به زبان ریاضی کدام یک از گزینه‌های زیر است؟ (۰/۵)

۱) $\exists x \in \square \; ; \left(\frac{1}{x} \in \square\right) \vee \left(x^2 \in \square\right)$

۲) ✓ $\exists x \in \square \; ; \left(\frac{1}{x} \in \square\right) \vee \left(\sqrt{x} \in \square\right)$

۳) $\forall x \in \square \; ; \left(\frac{1}{x} \in \square\right) \vee \left(\sqrt{x} \in \square\right)$

۴) $\exists x \in \square \; ; \left(\frac{1}{x} \in \square\right) \wedge \left(\sqrt{x} \in \square\right)$

ب) تعداد افرازهای دو تایی (دو قسمتی) مجموعه‌ی $A = \{a,b,c,d\}$ چند تاست؟ (۰/۵)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۶ ۴) ۷ ✓

حالت اول: $\{\circ\},\{\circ,\circ,\circ\} \longrightarrow \binom{4}{1} \times \binom{3}{3} = 4 \times 1 = 4$

حالت دوم: $\{\circ,\circ\},\{\circ,\circ\} \longrightarrow \frac{\binom{4}{2}\times\binom{2}{2}}{2!} = \frac{6\times 1}{2} = 3$

$4+3=7$

۱

۴- به کمک جدول ارزش گزاره‌ها، هم‌ارزی مقابل را ثابت کنید: $(p \Rightarrow \square q) \wedge q \equiv \square (q \Rightarrow p)$

p	q	~q	p→~q	q→p	(p→~q)∧q	~(q→p)
T	T	F	F	T	F	F
T	F	T	T	T	F	F
F	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	T	F	F

۱/۵

۵- بدون استفاده از جدول و به کمک قوانین جبر گزاره‌ها، هم‌ارزی زیر را ثابت کنید:

$(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv T$

$(p \wedge q) \rightarrow p \equiv \sim(p \wedge q) \vee p \equiv (\sim p \vee \sim q) \vee p \equiv (\sim p \vee p) \vee \sim q$

$\equiv T \vee \sim q \equiv T$

۱

۶- به کمک قوانین جبر گزاره‌ها، گزاره‌ی زیر را ساده کنید:

$\square (p \Rightarrow q) \vee (q \wedge p) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge p) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$

$\equiv p \wedge (\sim q \vee q) \equiv p \wedge T \equiv p$

۱

www.kanoon.ir

۷- عبارت «$\exists x \in \square \;;\; x^3 < \frac{1}{x}$» را در نظر بگیرید؛

الف) عبارت کلامی متناسب با آن را بنویسید.

مکعب حداقل یکی از اعداد حقیقی از معکوس آن کوچکتر است یا وجود دارد عددی حقیقی که معکوس آن از مکعب آن بزرگتر است.

۱/۵

ب) ارزش آن را با ذکر دلیل تعیین کنید.

درست است، زیرا مجموعه جواب آن تهی نیست.

$x^3 < \frac{1}{x} \longrightarrow (-2)^3 < \frac{1}{-2} \Rightarrow -2 \in S \Rightarrow S \neq \varnothing$

ج) نقیض آن را به زبان ریاضی بنویسید.

$\forall x \in R \;;\; x^3 \geq \frac{1}{x}$

۸- سه مجموعه‌ی A و B و C مثال بزنید که دارای شروط زیر باشند:

$A \in B \;,\; B \in C \;,\; A \subseteq C$

۱

$A = \varnothing$
$B = \{\varnothing\}$
$C = \{\{\varnothing\}\}$

یا

$A = \{1\}$
$B = \{\{1\}\}$
$C = \{1, \{\{1\}\}\}$

۹- مجموعه‌ی توانی $A = \{\varnothing \;,\; \{\varnothing\} \;,\; 2\}$ را با اعضا بنویسید.

۱

$P(A) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{2\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, 2\}, \{\{\varnothing\}, 2\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, 2\}\}$

۱۰- مجموعه‌ی A دارای ۶۲ زیرمجموعه‌ی محض ناتهی است. تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی A چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی آن است؟

$2^n - 2 = 62 \Rightarrow 2^n = 64 \Rightarrow n = 6$

$\Rightarrow \frac{\binom{6}{4}}{\binom{6}{2}} = \frac{\frac{6!}{4!2!}}{\frac{6!}{2!4!}} = 1$

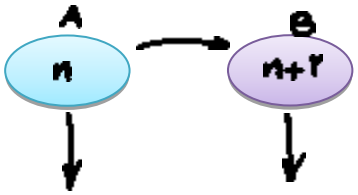
تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی و چهار عضوی A برابر است.

۱

www.kanoon.ir

۱۱- اگر به مجموعه‌ای دو عضو جدید اضافه کنیم به تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی آن ۱۵ تا اضافه می‌شود. تعداد کل زیرمجموعه‌های این مجموعه چندتاست؟

۱/۵



$\binom{n}{2} \xrightarrow{+15} \binom{n+2}{2} \rightarrow \binom{n}{2}+15=\binom{n+2}{2} \rightarrow \frac{n(n-1)}{2}+15=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

$\rightarrow n(n-1)+30=(n+2)(n+1) \rightarrow n^2-n+30=n^2+3n+2$

$\rightarrow 4n=28 \rightarrow n=7 \rightarrow$ تعداد زیرمجموعه‌های $A = 2^7 = 128$

۱۲- چهار افراز مختلف برای مجموعه‌ی $A=\{1,2,3,4\}$ بنویسید.

۱

۱) $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$

۲) $\{1\}, \{2,3,4\}$

۳) $\{2\}, \{1,3,4\}$

۴) $\{3\}, \{1,2,4\}$

تعداد ۴ عضوی A دوبی ۱۵ افراز مختلف است که هرکدام نوشته شود قابل قبول است.

۱۳- دو مجموعه‌ی $\{\{2b-6\}, \{b+2, c+8\}, a-2\}$ و $B=\{\{a-7\}, b+1, \{3b+1, a-1\}\}$ مساوی هستند. مقادیر a، b و c را بدست آورید.

۱/۵

$\begin{cases} (1)\ a-2=b+1 \rightarrow a-b=3 \\ (2)\ 2b-6=a-7 \rightarrow 2b-a=-1 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 2b-b=3-1 \rightarrow \boxed{b=2}$

$\rightarrow a-2=3 \rightarrow \boxed{a=5}$

$\{3b+1, a-1\}=\{b+2, c+8\} \xrightarrow[a=5]{b=2} \{7,4\}=\{4, c+8\} \rightarrow c+8=7$

$\rightarrow \boxed{c=-1}$

۱۴- به روش عضوگیری دلخواه ثابت کنید:

اگر $A \subseteq B$ آن‌گاه $B' \subseteq A'$

۱

$[\forall x;\ x \in B' \rightarrow x \notin B \xrightarrow{A \subseteq B} x \notin A \rightarrow x \in A'] \rightarrow B' \subseteq A'$

www.karnoon.ir

۱۵- خاصیت توزیع‌پذیری اشتراک نسبت به اجتماع را بنویسید و به کمک تعاریف و قوانین جبر گزاره‌ها آن را ثابت کنید.

خاصیت توزیع پذیری اشتراک نسبت به اجتماع : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

اثبات:

۱/۵

$$A \cap (B \cup C) = \{x \in M \mid x \in A \wedge x \in B \cup C\} \quad \text{تعریف اشتراک}$$
$$= \{x \in M \mid x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)\} \quad \text{تعریف اجتماع}$$
$$= \{x \in M \mid (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)\} \quad \text{توزیع پذیری } \wedge \text{ نسبت به } \vee$$
$$= \{x \in M \mid (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)\} \quad \text{تعریف اشتراک}$$
$$= (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{تعریف اجتماع}$$

۱۶- به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

$A-(B\cup C)=(A-B)-C$

۱

$$A-(B\cup C) = A\cap(B\cup C)' = A\cap(B'\cap C') = (A\cap B')\cap C'$$
$$= (A-B)\cap C' = (A-B)-C$$

۱۷- عبارت زیر را به کمک جبر مجموعه‌ها تا حد امکان ساده کنید:

$(A\cap B')\cup[(A\cap B)-A']\cap(A\cup B)=$

۱

$$= (A\cap B')\cup[(A\cap B)\cap A]\cap(A\cup B)$$
$$= (A\cap B')\cup(A\cap B)\cap(A\cup B) = A\cap(B'\cup B)\cap(A\cup B)$$
$$= A\cap M\cap(A\cup B) = A\cap(A\cup B) = A$$