سؤالات امتحانی درس : **آمار واحتمال**
پایه : **یازدهم**
رشته : **ریاضی**
نام و نام خانوادگی :

باسمه تعالی
اداره کل آموزش و پرورش استان قم
مدیریت آموزش و پرورش ناحیه ۴
دبیرستان غیر دولتی ارمغان دانش
سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲

تاریخ امتحان: 2 / ۱۰ / ۱۴۰۲
زمان پاسخگویی: ۱۱۰ دقیقه
نام دبیر:استاد **بهرامی**
تعداد سوال: ۱۶
تعداد صفحه: ۴

تاریخ تصحیح: | نمره با عدد: | باحروف: | امضای دبیر

نمره	
۱/۵	۱- جدول‌های ارزش گزاره‌ی زیر را تشکیل داده و نشان دهید این گزاره همواره درست است. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow q \equiv T$
۱	۲- ارزش‌های گزاره‌ای سوری زیر را تعیین کنید و نقیض هریک را بنویسید. الف) $\exists x \in R : x^{۲} - ۱ \geq (x - ۱)(x + ۱)$ ب) $\forall x \in Z : \frac{۴ - x^{۲}}{۲ + x} = ۲ - x$
۱	۳- حاصل گزارهٔ $[(p \wedge r) \vee (q \wedge r)] \vee [\sim p \wedge (\sim q \wedge r)]$ را بیابید .
۱	۴- اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود، مجموعه‌ی A چند زیرمجموعه دارد؟

www-kanoon-ir

۵- اگر $(n \in N)$ و $A_n = \left(-\frac{۱}{n}, \frac{۲n - ۱}{n}\right)$ مطلوبست: $A_۱ , A_۲ , A_۳$ سپس اجتماع و اشتراک $A_۱ , A_۲ , A_۳$ را مشخص کنید. — ۱/۵

۶- مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d, e\}$ را به چند طریق می‌توان به ۳ مجموعه افراز کرد؟ — ۱

۷- برای مجموعه‌های $A = \{a - ۲ , ۶ , -۱\}$ و $B = \{\sqrt{d} , ۵ , -۱\}$، فرض کنید $A \times B = B \times A$ باشد مقدار d , a را بیابید. — ۱

۸- با توجه به مجموعه‌های داده شده، نمودار هریک از حاصل‌ضرب‌های $A \times B$ را رسم کنید. — ۱

ب) $A = \{۳ , ۴\} , B = (۱ , ۵]$

پ) $A = [۲ , ۶] , B = [۳ , ۸]$

www-kanoon-ir

۹- درستی تساوی روبه‌رو را بررسی کنید. $(A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] = B$	۱
۱۰- هرگاه A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A \cap B = \varnothing$ در این صورت با عضوگیری ثابت کنید: $B - A = B$	۱
۱۱- عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید: الف) عدد انتخابی بر ۲ بخش‌پذیر باشد، ولی بر ۳ بخش‌پذیر نباشد. ب) عدد انتخابی نه بر ۲ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۳.	۲
۱۲- در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهده‌ی هر عدد، متناسب با همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال این‌که عدد مشاهده شده، کم‌تر از ۴ باشد را تعیین کنید.	۱/۵

www-kanoon-ir

۱۳- یک فضای نمونه‌ای متشکل از ۵ برآمد e، d، c، b، a است. اگر $P(a)=\frac{۱}{۴}$ و $P(\{a,b,c\})=\frac{۲}{۳}$ باشد، احتمال $P(\{b,c\} \mid \{a,b,c\})$ را بیابید.

۱/۵

۱۴- امیر و بهروز هر کدام به‌ترتیب با احتمال ۰/۶ و ۰/۳ در یک مسابقه‌ی علمی شرکت می‌کنند. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت بهروز برابر ۰/۵ است. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت نکردن بهروز،را بیابید .

۱/۵

۱۵- ثابت کنید هرگاه n عدد صحیح و $n^۲$ مضرب ۵ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۵ است.

۱

۱۶- دو تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع دو تاس ۸ آمده باشد، با کدام احتمال هر دو تاس عدد اول آمده‌اند؟

۱/۵

سعی کنید موفق باشید

جمع بارم ۲۰. نمره

www-kanoon-ir

۱-

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \vee p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	د
ن	د	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	ن	د
۰/۲۵	۰/۲۵	۰/۲۵	۰/۲۵	۰/۲۵	۰/۲۵

هر ستون ۰/۲۵

۲-

الف) درست است، ۰/۲۵

$$\sim(\exists x \in R : x^{۲} - ۱ \geq (x - ۱)(x + ۱))$$
$$\equiv \forall x \in R : x^{۲} - ۱ < (x - ۱)(x + ۱)$$ ۰/۲۵

پ) نادرست است ۰/۲۵

$$\sim\left(\forall x \in Z : \frac{۴ - x^{۲}}{۲ + x} = ۲ - x\right) \equiv \exists x \in Z : \frac{۴ - x^{۲}}{۲ + x} \neq ۲ - x$$ ۰/۲۵

۳-

$$[\sim p \wedge (\sim q \wedge r)] \vee [(q \wedge r) \vee (p \wedge r)] \equiv [\sim (p \vee q) \wedge r] \vee [(p \vee q) \wedge r]$$ ۰/۲۵

$$\equiv [\sim (p \vee q) \vee (p \vee q)] \wedge r \equiv T \wedge r \equiv r$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

۴-

$$۲^{x} - ۳۸۴ = ۲^{x-۲} \Rightarrow ۲^{x} - ۳۸۴ = ۲^{x} \div ۲^{۲} \Rightarrow ۲^{x} - ۲۸۴ = ۲^{x} \div ۴$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$۲^{x} - \frac{۲^{x}}{۴} = ۳۸۴ \Rightarrow ۲^{x}\left(۱ - \frac{۱}{۴}\right) = ۳۸۴ \Rightarrow ۲^{x} = ۳۸۴ \times \frac{۴}{۲} = ۵۱۲ = ۲^{۹} \Rightarrow x = ۹$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

۵-

$$A_۱ = (-۱ , ۱) , \ A_۲ = \left(\frac{-۱}{۲} , \frac{۳}{۲}\right) , \ A_۳ = \left(\frac{-۱}{۳} , \frac{۵}{۳}\right) \Rightarrow A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳ = \left(-۱ , \frac{۵}{۳}\right)$$ ۰/۵ ۰/۵

$$, \ A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳ = \left(\frac{-۱}{۳} , ۱\right)$$ ۰/۵

۶- مجموعه‌ی ۵ عضوی باید به ۳ مجموعه با تعداد اعضای ۳-۱-۱ یا ۲-۲-۱ افراز شود.

$$\text{تعداد افرازها} = \frac{\binom{۵}{۳}\binom{۲}{۱}\binom{۱}{۱}}{۲!} + \frac{\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۲}\binom{۱}{۱}}{۲!} = ۱۰ + ۱۵ = ۲۵$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

۷-

$$A \times B = B \times A \Rightarrow A = B \Rightarrow \sqrt{d} = ۶ \Rightarrow d = ۳۶$$ ۰/۲۵

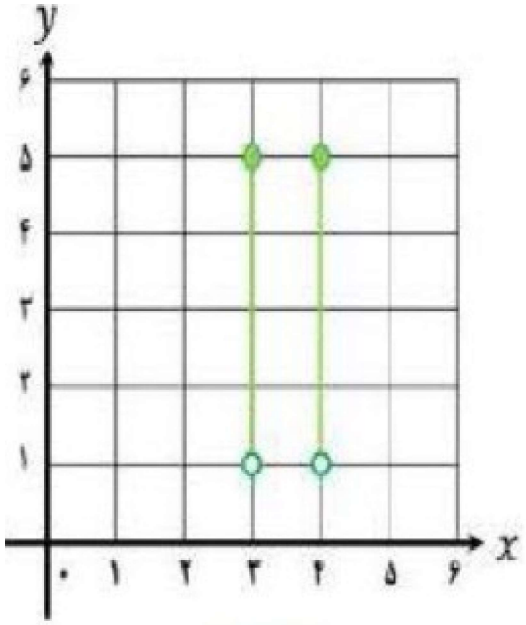
$$\begin{cases} A = \{a - ۲ , ۶ , -۱\} \\ B = \{۶ , ۵ , -۱\} \end{cases}$$ ۰/۲۵

$$a - ۲ = ۵ \Rightarrow a = ۷$$ ۰/۲۵

www.kanoon.ir

-۸

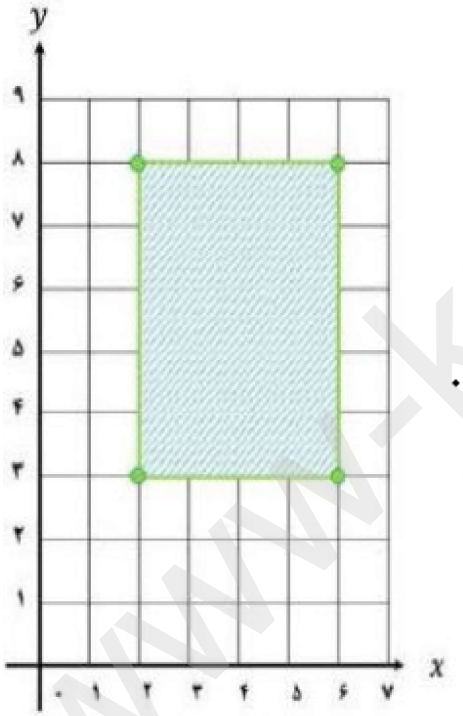
ب) $A=\{۳,۴\}, B=(۱,۵]$



۰/۵

$A \times B$

پ) $A=[۲,۶]$, $B=[۳,۸]$



۰/۵

$A \times B$

-۹

$(A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] = (A' \cap B) \cup [(B \cap A) \cap B] = (A' \cap B) \cup (A \cap B)$ ۰/۲۵

$= B \cap (A' \cup A)^{U} = B \cap U = B$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

-۱۰

الف) $\forall x\ ; x \in (B - A) \Rightarrow x \in B \wedge x \notin A \Rightarrow x \in B \Rightarrow B - A \subseteq B$ (۱) ۰/۲۵

$\forall x\ ; x \in B \xrightarrow{A \cap B = \varnothing} x \in B \wedge x \notin A \Rightarrow x \in B - A \Rightarrow B \subseteq B - A$ (۲) ۰/۲۵ ۰/۲۵

از ۱ و ۲ داریم: ۰/۲۵

$B - A = B$

-۱۱

$n(S) = ۱۰۰$

www.kanoon.ir

ب) $n(۲ \cap \bar{۳}) = n(۲ - ۳) = n(۲) - n(\overbrace{۲ \cap ۳}^{\text{مضرب ۶}}) = \left[\frac{۱۰۰}{۲}\right] - \left[\frac{۱۰۰}{۶}\right] = ۳۴ \Rightarrow p = \frac{۳۴}{۱۰۰}$

ج) $n(\bar{۲} \cap \bar{۳}) = n((۲ \cup ۳)') = n(S) - n(۲ \cup ۳) = ۱۰۰ - ۶۷ = ۳۳ \Rightarrow p = \frac{۳۳}{۱۰۰}$

۱۲-

می‌دانیم : $p(۱) + \ldots + p(۶) = ۱$

$p(۱) = ۱ \times k \ , \ p(۲) = ۲ \times k \ , \ \ldots \ , \ p(۶) = ۶ \times k$

$\Rightarrow k + ۲k + \ldots + ۶k = ۱ \Rightarrow ۲۱k = ۱ \Rightarrow k = \frac{۱}{۲۱}$

کمتر از ۴ : $p(۱) + p(۲) + p(۳) = ۶k = \frac{۶}{۲۱} = \frac{۲}{۷}$

۱۳- ابتدا $p(\{b,c\})$ را پیدا می‌کنیم:

$P(\{b,c\}) = \frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۴} = \frac{۵}{۱۲}$

حال از فرمول رابطه‌ی شرطی یعنی $\left(P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}\right)$ استفاده کرده و جواب را می‌یابیم:

$$\frac{P(\{b,c\})}{P(\{a,b,c\})} = \frac{\frac{۵}{۱۲}}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۵}{۸}$$

۱۴- احتمال شرکت کردن امیر در مسابقه را با A و احتمال شرکت کردن بهروز در مسابقه را با B نشان می‌دهیم. داریم:

$P(A) = ۰/۶ \ , \ P(B) = ۰/۳ \ , \ P(A|B) = ۰/۵$

$$\Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = ۰/۵ \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{۰/۳} = ۰/۵ \Rightarrow P(A \cap B) = ۰/۱۵$$

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A - B)}{۱ - P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{۱ - P(B)} = \frac{۰/۶ - ۰/۱۵}{۰/۷} = \frac{۰/۴۵}{۰/۷} = \frac{۹}{۱۴}$$

۱۵- به جای اثبات حکم، عکس نقیض آن‌را ثابت می‌کنیم.

$(n^۲ \text{ مضرب ۵ نیست}) \Rightarrow (n \text{ مضرب ۵ نیست}) \equiv (n \text{ مضرب ۵ است}) \Rightarrow (n^۲ \text{ مضرب ۵ است})$

در این قسمت دو روش برای اثبات داریم:

روش اول: اگر n مضرب ۵ نباشد، یعنی $n \neq ۵k$ و خواهیم داشت:

$$n^۲ \neq (۵k)^۲ \neq ۲۵k^۲ \neq ۵\underbrace{(۵k^۲)}_{k' \in Z} \neq ۵k'$$

در نتیجه $n^۲$ مضرب ۵ نیست.

روش دوم: اگر n مضرب ۵ نباشد، پس به صورت زیر است:

$$n = ۵k + r(۱ \leq r \leq ۴) \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می رسانیم}} n^۲ = (۵k + r)^۲ = ۲۵k^۲ + ۱۰kr + r^۲$$

$$\underbrace{۵(۵k^۲ + ۲kr)}_{k' \in Z} + r^۲ = ۵k' + r^۲$$

www-kanoon-ir

$$\Rightarrow \begin{cases} r=۱ \Rightarrow n^{۲}=۵k'+۱ & \left(n^{۲} \text{ مضرب ۵ نیست}\right) \\ r=۲ \Rightarrow n^{۲}=۵k'+۴ & \left(n^{۲} \text{ مضرب ۵ نیست}\right) \\ r=۳ \Rightarrow n^{۲}=۵k'+۹ & \left(n^{۲} \text{ مضرب ۵ نیست}\right) \\ r=۴ \Rightarrow n^{۲}=۵k'+۱۶ & \left(n^{۲} \text{ مضرب ۵ نیست}\right) \end{cases}$$

در نتیجه در هر ۴ حالت، $n^{۲}$ مضرب ۵ نیست.

۱۶- اگر مجموع دو تاس ۸ آمده باشد حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

$S=\{(۶,۲),(۲,۶),(۵,۳),(۳,۵),(۴,۴)\}$ فضای نمونه ای کاهش یافته **۰/۲۵**

۰/۵

$A=\{(۵,۳),(۳,۵)\} \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۵}$ **۰/۵**

۰/۲۵

موفق باشید

جمع بارم ۲۰ نمره