نام ونام خانوادگی | مدیریت آموزش وپرورش شهرستان کبودراهنگ | تاریخ: ۱۴۰۴/۱۰/۰۶

امتحان درس: آمار واحتمال | **دبیرستان آینده سازان** | زمان ۱۰۰ دقیقه

پایه: یازده ریاضی | سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴ | دیماه ۱۴۰۴

۱- جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

الف) مجموعه $A = \{\{\}, \{\varnothing\}\}$ دارای ..... زیرمجموعه است.

ب) دو زوج مرتب $\left((x+۲)^{۲}, y^{۲}-۱\right)$ و $(۳, ۰)$ با هم برابرند. مقدار y برابر با ..... است.

ج) دو مجموعه $A = \{-۱, ۰, ۱, ۲\}$ و $B = \{-۳, -۲, ۱, ۲, ۳\}$ را درنظر بگیرید. مجموعه $A \times B$ دارای ..... عضو است.

۲- جای خالی را تکمیل کنید.

الف) $\sim(\sim p) \equiv \ldots$ ب) $\sim(p \vee q) \equiv \ldots \wedge \ldots$

پ) $\sim(p \wedge q) \equiv \ldots \vee \ldots$ ت) $\sim(\ldots \wedge q) \equiv p \vee \ldots$

۳- اگر $A = \{y+۲, ۵, z\}$ و $B = \{x+۱, ۴, -۲\}$ در این صورت، با فرض $A \times B = B \times A$ بیش‌ترین مقدار برای $(x+y+z)$ را بیابید.

۴- فقط با استفاده از اصول احتمال و قضایای اثبات شده، گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

الف) اگر $B \subseteq A$ داریم: $P(A-B) = P(A) - P(B)$.

ب) اگر $B \subseteq A$، آن‌گاه $P(A) \leq P(A)$.

۵- هریک از عبارت‌های زیر را ساده کنید:

الف) $(A' \cap B) \cup ([(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A))$

ب) $(A \cup B) - B$

پ) $[(A \cup B) - A] \cup (A \cap B)$

۶- اگر $A = \{۲, x+۲y, ۴\}$ و $B = \{۴, ۵, x-y\}$ و $A = B$ در این صورت، مقادیر x و y را بیابید.

۷- ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هریک را بنویسید.

الف) $\forall x \in R\ ;\ \frac{x^{۲}-۱}{x-۱} = x+۱$ ب) $\forall n \in N\ ;\ (۲^{n}+۱) \in P$

پ) $\forall x \in (-\infty, ۰)\ ;\ x - \frac{۱}{x} \leq -۲$ ت) $\exists y \in R\ ;\ \frac{y-۳}{۵} = ۰$

۸- ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و $n^{۲}$ مضرب ۳ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۳ است.

۹- جدول ارزش گزاره $(p \vee \sim q) \Rightarrow q$ را تشکیل دهید.

www-kanoon-ir

۱۰- با استفاده از روش عضوگیری دلخواه نشان دهید که: $A \cap (A \cup B) = A$

۱۱- اگر $P(A) = \frac{۲}{۵}$، $P(B') = \frac{۳}{۷}$ و $P(A \cap B) = \frac{۱}{۵}$ مطلوب است:

الف) $P(A \cup B)$ ب) $P(A - B)$

۱۲- اگر $A = R$ و $B = \{۲ , ۳\}$ باشند، نمودار ضرب دکارتی $A \times B$ را رسم کنید.

۱۳- در ظرفی ۴ مهره سفید و ۳ مهره قرمز است. ۲ مهره به تصادف با هم بیرون می‌آوریم. احتمال آن‌که حداکثر یکی از آن‌ها سفید باشد را محاسبه کنید.

۱۴- ۱۰ نفر را در نظر می‌گیریم، احتمال این‌که روز تولد هیچ دو نفری از آن‌ها یک روز نباشد را مشخص کنید. (سال را ۳۶۵روز در نظر بگیرید.)

۱۵- اگر $A = (-\infty , -۱]$ و $B = [-۲ , ۳]$ باشد، نمودار حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ را رسم کنید.

www-kanoon.ir

نام ونام خانوادگی | مدیریت آموزش وپرورش شهرستان کبودراهنگ | تاریخ: ۱۴۰۴/۱۰/۰۶

امتحان درس: ریاضی وامار۲ | دبیرستان اینده سازان | زمان ۱۰۰ دقیقه

پاسخنامه

۱- جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

الف) مجموعه $A = \{\{\} , \{\varnothing\}\}$ دارای ..... زیرمجموعه است.

ب) دو زوج مرتب $\left((x+۲)^۲ , y^۲ - ۱\right)$ و (۳ , ۰) با هم برابرند. مقدار y برابر با ..... است.

ج) دو مجموعه $A = \{-۱ , ۰ , ۱ , ۲\}$ و $B = \{-۳ , -۲ , ۱ , ۲ , ۳\}$ را درنظر بگیرید. مجموعه $A \times B$ دارای ..... عضو است.

الف) ۴ (۰/۲۵) : تعداد زیرمجموعه یک مجموعه n عضوی برابر ۲^n می‌باشد.

ب) ۲ $y = \pm ۲$ (۰/۵)
$$\begin{cases} (x+۲)^۲ = ۰ \rightarrow x = -۲ \\ y^۲ - ۱ = ۳ \rightarrow y = \pm ۲ \end{cases}$$

ج) ۲۰ (۰/۲۵) می‌دانیم : $n(A \times B) = n(A) \times n(B) = ۴ \times ۵ = ۲۰$

۲- جای خالی را تکمیل کنید.

الف) $\sim(\sim p) \equiv \ldots$ ب) $\sim(p \vee q) \equiv \ldots \wedge \ldots$

پ) $\sim(p \wedge q) \equiv \ldots \vee \ldots$ ت) $\sim(\ldots \wedge q) \equiv p \vee \ldots$

الف) $\sim(\sim p) \equiv p$ ب) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

پ) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ ت) $\sim(\sim p \wedge q) \equiv p \vee \sim q$

۳- اگر $A = \{y+۲ , ۵ , z\}$ و $B = \{x+۱ , ۴ , -۲\}$ در این صورت، با فرض $A \times B = B \times A$ بیش‌ترین مقدار برای $(x + y + z)$ را بیابید.

می‌دانیم اگر $A \times B = B \times A$ باشد، خواهیم داشت $A = B$، بنابراین $\{y+۲ , ۵ , z\} = \{x+۱ , ۴ , -۲\}$، واضح است که ۵ فقط می‌تواند با $x+۱$ برابر باشد، لذا $x = ۴$ است. اما در دو مورد دیگر دو حالت داریم:

$$[(y+۲) \wedge (z = -۲)] \vee [(y+۲ = -۲) \wedge (z = ۴)] \Rightarrow [(y = -۲) \wedge (z = -۲)] \vee [(y = -۴) \wedge (z = ۴)]$$
$$\Rightarrow y + z = ۰ \Rightarrow x + y + z = ۴$$

۴- فقط با استفاده از اصول احتمال و قضایای اثبات شده، گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

الف) اگر $B \subseteq A$ داریم: $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

ب) اگر $B \subseteq A$، آن‌گاه $P(A) \leq P(A)$.

الف) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(B)$

$B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)$

ب) $B \subseteq A \Rightarrow B \leq A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$

۵- هریک از عبارت‌های زیر را ساده کنید:

الف) $(A' \cap B) \cup ([(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A))$

ب) $(A \cup B) - B$

پ) $[(A \cup B) - A] \cup (A \cap B)$

الف) $(A' \cap B) \cup ([(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A)) \Rightarrow$

$$(B \cap A') \cup \underbrace{[\overbrace{(B \cap A) \cap B'}^{B \cap A} \cap (B \cup A)}_{B \cup A} = (B - A) \cup (B \cup A)$$

$(B - A) \subset (B \cup A)$

www-kanoon-ir

نام ونام خانوادگی | مدیریت آموزش وپرورش شهرستان کبودراهنگ | تاریخ: ۱۴۰۴/۱۰/۰۶

امتحان درس: ریاضی وامار۲ | دبیرستان اینده سازان | زمان ۱۰۰ دقیقه

پاسخنامه

ب) $(A \cup B) - B \Rightarrow (A \cup B) \cap B' = \overbrace{(A \cap B')}^{A-B} \cup \overbrace{(B \cap B')}^{\varnothing} = (A - B)$

$= (B \cap A') \cup (B \cap A) = B \cap (A' \cup A) = B$

پ) $[(A \cup B) - A] \cup (A \cap B) = [\overbrace{(A \cap A')}^{\varnothing} \cup (B \cap A')] \cup (A \cap B)$

$= (B \cap A) \cup (A \cap B) = B \cap \overbrace{(A \cup A)}^{U} = B$

۶- اگر $A = \{۲ , x + ۲y , ۴\}$ و $B = \{۴ , ۵ , x - y\}$ و $A = B$ در این صورت، مقادیر x و y را بیابید.

$x + ۲y = ۵$

$x - y = ۴ \begin{cases} x + ۲y = ۵ \\ ۲x - ۲y = ۸ \end{cases} \Rightarrow ۳x = ۱۳ \Rightarrow x = \frac{۱۳}{۳} \Rightarrow \frac{۱۳}{۳} - y = ۴ \Rightarrow \frac{۱۳}{۳} - ۴ = y \Rightarrow \frac{۱}{۳} = y$

۷- ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هریک را بنویسید.

الف) $\forall x \in R \; ; \; \frac{x^۲ - ۱}{x - ۱} = x + ۱$

ب) $\forall n \in N \; ; \; (۲^n + ۱) \in P$

پ) $\forall x \in (-\infty , ۰) \; ; \; x - \frac{۱}{x} \leq -۲$

ت) $\exists y \in R \; ; \; \frac{y - ۳}{۵} = ۰$

الف) $\exists x \in R \; ; \; \frac{x^۲ - ۱}{x - ۱} \neq x + ۱$ - نادرست

ب) $\exists n \in N \; ; \; (۲^{۲n} + ۱) \notin P$ - درست

پ) $\exists x \in (-\infty , ۰) \; ; \; x - \frac{۱}{x} \geq -۲$ - نادرست

ت) $\forall y \in R \; ; \; \frac{y - ۳}{۵} \neq ۰$ - درست

۸- ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و $n^۲$ مضرب ۳ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۳ است.

از عکس نقیض کمک می‌گیریم: $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

n مضرب ۳ : $\begin{cases} n = ۳q + ۱ \Rightarrow n^۲ = ۹q^۲ + ۶q + ۱ = \text{مضرب ۳ نیست} \\ n = ۳q + ۲ \Rightarrow n^۲ = ۹q^۲ + ۱۲q + ۴ = \text{مضرب ۳ نیست} \end{cases}$ $\Rightarrow$ پس گزاره درست است.

۹- جدول ارزش گزاره $(p \vee \sim q) \Rightarrow q$ را تشکیل دهید.

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$(p \vee \sim q) \Rightarrow q$
د	د	ن	د	د

www-kanoon-ir

نام ونام خانوادگی | مدیریت آموزش وپرورش شهرستان کبودراهنگ | تاریخ: ۱۴۰۴/۱۰/۰۶

امتحان درس: ریاضی وامار۲ | دبیرستان اینده سازان | زمان ۱۰۰ دقیقه

پاسخنامه

۱۰- با استفاده از روش عضوگیری دلخواه نشان دهید که: $A \cap (A \cup B) = A$

باید ثابت کنیم که $A \subseteq A \cap (A \cup B)$ و $A \cap (A \cup B) \subseteq A$

$$\forall x\ ;\ (x \in A \cap (A \cup B) \Rightarrow (x \in A \wedge (x \in A \vee x \in B))) \Rightarrow x \in A$$
$$\forall x\ ;\ (x \in A \cap (A \cup B) \Rightarrow x \in A) \Rightarrow A \cap (A \cup B) \subseteq A \quad (1)$$
$$\begin{cases} \forall x\ ;\ (x \in A \Rightarrow (x \in A \vee x \in B)) \\ \forall x\ ;\ (x \in A \Rightarrow x \in A) \end{cases} \xrightarrow{\cap} \forall x\ ;\ (x \in A \Rightarrow (x \in A \wedge (x \in A \vee x \in B)))$$
$$\Rightarrow x \in A \cap (A \cup B)$$
$$\forall x\ ;\ (x \in A \Rightarrow x \in A \cap (A \cup B)) \Rightarrow A \subseteq A \cap (A \cup B) \xrightarrow{(1)} A = A \cap (A \cup B)$$

۱۱- اگر $P(A) = \frac{۲}{۵}$، $P(B') = \frac{۳}{۷}$ و $P(A \cap B) = \frac{۱}{۵}$ مطلوب است:

الف) $P(A \cup B)$ ب) $P(A - B)$

الف) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

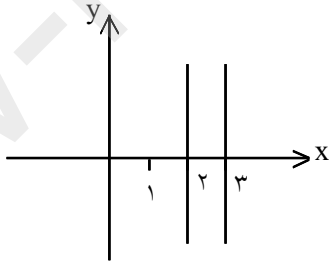
$$= \frac{۲}{۵} + \left(۱ - \frac{۳}{۷}\right) - \frac{۱}{۵} = \frac{۲}{۵} + \frac{۴}{۷} - \frac{۱}{۵} = \frac{۱}{۵} + \frac{۴}{۷} = \frac{۲۷}{۳۵}$$

ب) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{۲}{۵} - \frac{۱}{۵} = \frac{۱}{۵}$

۱۲- اگر $A = R$ و $B = \{۲ , ۳\}$ باشند، نمودار ضرب دکارتی $B \times A$ را رسم کنید.

$A = R$

$B = \{۲ , ۳\}$



۱۳- در ظرفی ۴ مهره سفید و ۳ مهره قرمز است. ۲ مهره به تصادف با هم بیرون می‌آوریم. احتمال آن‌که حداکثر یکی از آن‌ها سفید باشد را محاسبه کنید.

$$n(S) = \binom{۷}{۲} \quad (۰/۲۵) \quad , \quad n(A) = \binom{۴}{۰}\binom{۳}{۲} + \binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱} \quad (۱) \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \underset{(۰/۲۵)}{=} \frac{۱۵}{۲۱}$$

۱۴- ۱۰ نفر را در نظر می‌گیریم، احتمال این‌که روز تولد هیچ دو نفری از آن‌ها یک روز نباشد را مشخص کنید. (سال را ۳۶۵روز در نظر بگیرید.)

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(s)} \quad (۰/۲۵) = \frac{۳۶۵ \times ۳۶۴ \times \ldots (۳۶۵ - ۱۰ + ۱)}{۳۶۵^{۱۰}} \quad (۰/۲۵)$$

۱۵- اگر $A = (-\infty , -۱]$ و $B = [-۲ , ۳]$ باشد، نمودار حاصل ضرب دکارتی $B \times A$ را رسم کنید.

www-kanoon-ir

نام ونام خانوادگی	مدیریت آموزش وپرورش شهرستان کبودراهنگ	تاریخ: ۱۴۰۴/۱۰/۰۶
امتحان درس: ریاضی وامار۲	دبیرستان اینده سازان	زمان ۱۰۰ دقیقه
	سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴	دیماه ۱۴۰۴

رسم نمودار (۰/۷۵)

