نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: آمار ۱۱ تشریحی

زمان برگزاری: ۳۰ دقیقه

دبیرستان تلاش

۱ ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید. سپس نقیض هر یک را بنویسید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; \frac{x^۲ - ۱}{x - ۱} = x + ۱$

ب) $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; (۲^{۲^n} + ۱) \in P$

پ) $\forall x \in (-\infty, ۰) \; ; \; x - \frac{۱}{x} \leq -۲$

ت) $\exists y \in \mathbb{R} \; ; \; \frac{y - ۳}{۵} = ۰$

۲ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با هم مساوی‌اند؟

$A = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < ۲\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z} | x^۳ = x\}$

$C = \{y \in \mathbb{Z} | y^۲ \leq ۲y\}$

$D = \{m \in \mathbb{Z} | m^۲ \leq ۱\}$

$E = \{m \in \mathbb{Z} | m^۳ + ۲m = ۳m^۲\}$

۳ نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) اگر $۰ < x < ۱$، آنگاه $x^۲ < x$.

ب) ابوالوفا محمد بوزجانی، ریاضی‌دان است.

پ) $a \in \{b, c, d\}$

ت) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویاست.

۴ اگر $S = \{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A = \{a, b\}$، $B = \{a, b, c, d\}$ و $C = \{a, b, e\}$ سه پیشامد باشند به‌طوری که $P(A) = \frac{۲}{۷}$ و $P(B) = \frac{۳}{۵}$، مقدار $P(C')$ را به دست آورید.

۵ جعبه‌ای شامل ۱۲ لامپ است که سه تای آنها معیوب است. اگر به‌تصادف و بدون جای‌گذاری ۳ لامپ از جعبه بیرون آوریم، احتمال آن را به دست آورید که:

الف) هر سه لامپ معیوب باشند

ب) حداقل یک لامپ معیوب باشد.

۶ فرض کنید از بین چهار کارت با شماره‌های ۱ تا ۴ کارتی به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می‌کنیم. اگر ۲ بار رو بیاید احتمال اینکه شماره کارت خارج‌شده ۳ باشد چقدر است؟

۷ فرض کنید سنّ افرادی که در یک روز سوار اتوبوس شده‌اند، به‌صورت زیر است:

۳۲, ۵۹, ۲۶, ۵۳, ۷۴, ۱۷, ۴۵, ۲۳, ۶۴, ۵۰, ۶۱

انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات سنّ افراد را به دست آورید.

۸ دانش‌آموزی در کنکور سراسری شرکت می‌کند و نتیجهٔ کارنامه آزمون آن به شرح زیر است:

مواد امتحانی	ریاضیات	فیزیک	شیمی	زبان انگلیسی	ادبیات و زبان فارسی	دین و زندگی
درصد	۵۳	؟	۶۷	۳۴	۸۰	۶۷
ضریب درس	۴	۳	۱	۱	۴	۳

اگر معدل موزون درصد این دانش‌آموز ۷۳ باشد، درس فیزیک را چند درصد زده است؟

۹ اگر فراوانی نسبی مربوط به گروه خونی O، ۰٫۴ باشد، مجموع فراوانی‌های همهٔ گروه‌های خونی برابر ۲۰ در نظر گرفته شود. فراوانی گروه خونی O چند است؟

www.kanoon.ir

۱۰ جدول فراوانی و نمودارهای مناسب مربوط به تعداد حروف بیت شعر زیر را به‌دست آورید.

کیست این پنهان مرا در جان و تن　　کز زبان من همی گوید سخن

۱۱ داده‌های زیر نمرات ۲۴ دانش‌آموز از ۱۰۰ است.

۷۵, ۷۴, ۷۳, ۷۱, ۷۱, ۷۰, ۶۷, ۷۵, ۷۹, ۷۸, ۷۸, ۷۸, ۷۸, ۷۷, ۷۵, ۸۰, ۸۷, ۸۶, ۸۶, ۸۳, ۸۲, ۸۲, ۸۱, ۹۱

الف) میانگین و انحراف معیار نمرات را محاسبه کنید.

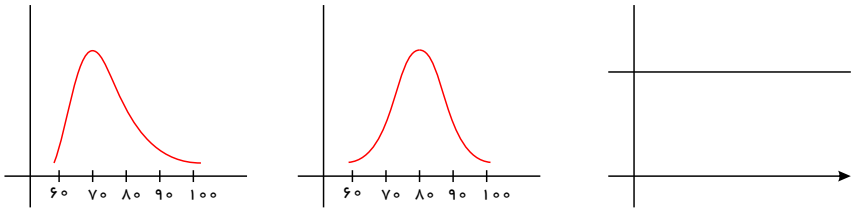
ب) اگر انحراف معیار جامعه ۶ باشد. بازهٔ اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین محاسبه کنید.

پ) چند درصد داده‌ها داخل این بازه هستند.

ت) بافت نگاشت فراوانی داده‌ها را رسم کنید (در فواصل $[۶۷, ۷۱)$, $[۷۱, ۷۵)$ و ...)

ث) چندبر فراوانی بافت نگاشت را رسم کنید.

ج) اگر داده‌ها زیاد شود نمودار بافت نگاشت شبیه کدام‌یک از نمودارها می‌شود.



۱۲ آیا احتمال انتخاب واحدهای آماری در نمونه‌گیری طبقه‌ای یکسان است؟ در هر طبقه چطور؟

۱۳ از اعداد ۰ تا N، ۱۰ عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر اعداد انتخابی به صورت زیر باشند، با دو روش مختلف میانگین N را برآورد کنید.

۵	۸	۹	۱۱	۱۲	۳	۷	۵	۲	۹

۱۴ رئیس یک دانشگاه علاقه‌مند است متوسط سن دانشجویانی که در سال جاری ثبت نام کرده‌اند را بداند. برای این کار او یک نمونهٔ تصادفی از سن ۲۵ دانشجو را انتخاب می‌کند میانگین سن آنها ۲۲ سال برآورد شده است. اگر در بررسی‌های گذشته انحراف معیار سن دانشجویان ۱٫۹ باشد. بازهٔ اطمینان ۹۵درصد برای میانگین سن جامعه را محاسبه کنید.

۱۵ در یک مطالعه از ۱۲۶۱ مشتری غذاهای گیاهی، سؤال شده است که برای کدام وعدهٔ غذایی (ناهار یا شام) سفارش داده‌اند؟

الف) متغیّر را مشخص کنید. این متغیّر کمّی است یا کیفی؟

ب) کدام روش گردآوری داده‌ها برای مطالعه مناسب است؟

پ) جامعهٔ آماری در اینجا چیست؟ در این مطالعه پارامتر و آماره چه چیزی می‌توانند باشند؟

www-kanoon-ir

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ الف) نادرست، $x = ۱$ عضو دامنه نیست.

$$\sim (\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^۲ - ۱}{x - ۱} = x + ۱) \equiv \exists x \in \mathbb{R}; \frac{x^۲ - ۱}{x - ۱} \neq x + ۱$$

ب) نادرست. برای $n = ۷$ اثبات شده که اول نیست.

$$\sim (\forall n \in \mathbb{N}; (۲^{۲^n} + ۱) \in P \equiv \exists n \in \mathbb{N}; (۲^{۲^n} + ۱) \notin P$$

پ) نادرست $(x = -\frac{۱}{۸})$

$$\sim (\forall x \in (-\infty, ۰); x - \frac{۱}{x} \leq ۲) \equiv \exists x \in (-\infty, ۰); x - \frac{۱}{x} > ۲$$

ت) درست $(y = ۳)$

$$\sim (\exists y \in \mathbb{R}; \frac{y - ۳}{۵} = ۰) \equiv \forall y \in \mathbb{R}; \frac{y - ۳}{۵} \neq ۰$$

۲ مجموعه‌ها را تشکیل می‌دهیم.

$$A = \{-۱, ۰, ۱\}$$
$$B = \{-۱, ۰, ۱\}$$
$$C = \{۰, ۱, ۲\}$$
$$D = \{-۱, ۰, ۱\}$$
$$E = \{۰, ۱, ۲\} \Rightarrow m(m^۲ - ۳m + ۲) = m(m - ۱)(m - ۲) = ۰$$

با توجه به محاسبات فوق $A = B = D$ می‌باشد و $E = C$ می‌باشد.

۳ الف) $x^۲ \geq x, ۰ < x < ۱$

ب) ابوالوفای بوزجانی، ریاضی‌دان نیست.

پ) $a \notin \{b, c, d\}$

ت) ۲ عددی زوج نیست و عدد π گویا نیست.

۴ طبق فرض سؤال و اینکه جمع احتمال‌ها برابر با یک است داریم:

$$\begin{cases} P(S) = ۱ \\ P(\{a, b, c, d\}) = \frac{۳}{۵} \end{cases} \rightarrow P(\{e\}) = ۱ - \frac{۳}{۵} = \frac{۲}{۵}$$

$$P(c) = P(\{a, b, e\}) = \cancel{P(\{a, b\})}^{\frac{۲}{۷}} + \cancel{P(\{e\})}^{\frac{۲}{۵}} = \frac{۲۴}{۳۵}$$

$$P(C') = ۱ - P(C) = ۱ - \frac{۲۴}{۳۵} = \frac{۱۱}{۳۵}$$

۵ الف)

$A =$ پیشامد معیوب بودن ۳ لامپ

۹ لامپ سالم	۳ معیوب

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{۳}{۳}}{\binom{۱۲}{۳}} = \frac{۱}{۲۲۰}$$

ب)

$B =$ پیشامد حداقل یک لامپ معیوب بودن
$B' =$ هیچ لامپی معیوب نباشد

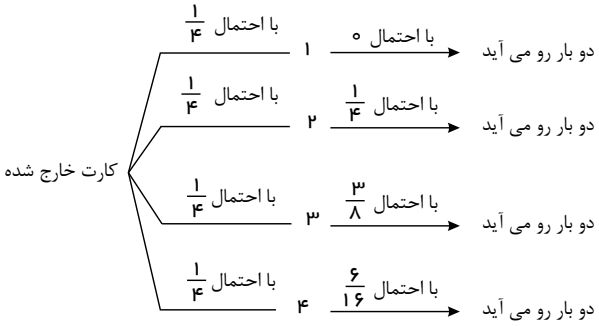
$$\rightarrow P(B') = \frac{n(B')}{n(S)} = \frac{\binom{۹}{۳}}{\binom{۱۲}{۳}} = \frac{\frac{۹ \times ۸ \times ۷}{۶}}{\frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰}{۶}} = \frac{۵۰۴}{۱۳۲۰} = \frac{۲۱}{۵۵}$$

$$P(B) = ۱ - P(B') = ۱ - \frac{۲۱}{۵۵} = \frac{۳۴}{۵۵}$$

۶

www.kanoon.ir

طبق نمودار درختی داریم:



$$P(\text{دو بار آمدن}) = ۰ \times \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} \times \frac{۳}{۸} + \frac{۱}{۴} \times \frac{۶}{۱۶} = \frac{۱}{۴}(\frac{۶+۶+۴}{۱۶})$$

$$P(\text{دو بار آمدن}) = \frac{۱}{۴}$$

$$P(\text{۳ خارج شدن شماره} \mid \text{دو بار رو آمدن}) = \frac{P(\text{دو بار آمدن} \cap \text{۳ خارج شدن شماره})}{P(\text{دو بار رو آمدن})} = \frac{\frac{۳}{۸} \times \frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۴}} = \frac{۳}{۸}$$

۷

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{۳۲ + ۵۹ + ۲۶ + ۵۳ + ۷۴ + ۱۷ + ۴۵ + ۲۳ + ۶۴ + ۵۰ + ۶۱}{۱۱} \simeq ۴۵٫۸ \simeq ۴۶$$

واریانس $= \sigma^۲ = \frac{\sum (x-\bar{x})^۲}{n} = \frac{۱۹۶ + ۱۶۹ + ۴۰۰ + ۴۹ + ۷۸۴ + ۸۴۱ + ۱ + ۵۲۹ + ۳۲۴ + ۱۶ + ۲۲۵}{۱۱} \simeq ۳۲۱٫۲۷$

انحراف معیار $\sigma = \sqrt{\sigma^۲} = \sqrt{۳۲۱٫۲۷} \simeq ۱۷٫۹$

ضریب تغییرات $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۱۷٫۹}{۴۶} = ۰٫۳۸۹$

۸

$$\text{معدل موزون} = \frac{۵۳ \times ۴ + x \times ۳ + ۶۷ \times ۱ + ۳۴ \times ۱ + ۸۰ \times ۴ + ۶۷ \times ۳}{۳ + ۴ + ۱ + ۱ + ۳ + ۴} = ۷۳$$

$$= \frac{۸۳۴ + ۳x}{۱۶} = ۷۳ \rightarrow ۸۳۴ + ۳x = ۱۱۶۸ \rightarrow ۳x = ۳۳۳ \rightarrow x = ۱۱۱$$

پس درصد فیزیک این دانش‌آموز $\overline{۶۶}$ ۶۲٫ می‌باشد. $x = ۶۲٫\overline{۶۶}$

۹

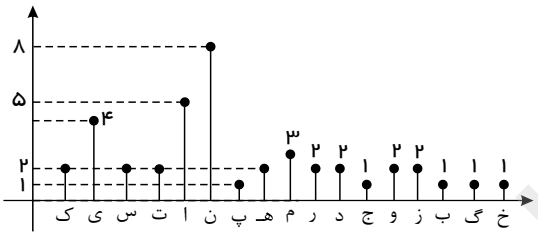
فراوانی نسبی $\bar{f} = \frac{f}{n} \rightarrow ۰٫۴ = \frac{f}{۲۰} \Rightarrow f = ۸$

۱۰ جدول فراوانی حروف را رسم می‌کنیم.

www-kanoon-ir

حروف	فراوانی
ک	۲
ی	۴
س	۲
ت	۲
ا	۵
ن	۸
پ	۱
هـ	۲
م	۳
ر	۲
د	۲
ج	۱
و	۲
ز	۲
ب	۱
گ	۱
خ	۱

نمودار میله‌ای



۱۱ ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم.

الف)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{۱۸۷۷}{۲۴} \simeq ۷۸$$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^۲}{n} = \frac{۸۰۱}{۲۴} \simeq ۳۳٫۳۷ \to \sigma \simeq ۵٫۷$$

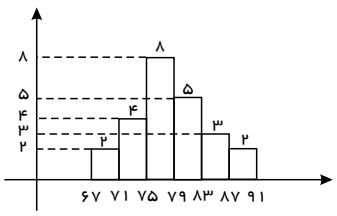
ب)

$$\bar{x} - \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} \to ۷۸ - \frac{۲ \times ۶}{\sqrt{۲۴}} \le \mu \le ۷۸ + \frac{۲ \times ۶}{\sqrt{۲۴}} \to \mu \in [۷۵٫۶, ۸۰٫۴]$$

پ) تعداد داده‌ها در این بازه ۷ تایی باشد.

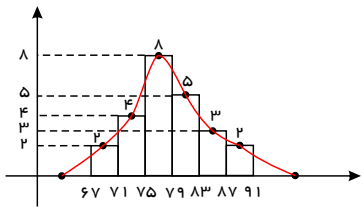
$$\frac{۷}{۲۴} \times ۱۰۰ = ۲۹$$

ت)

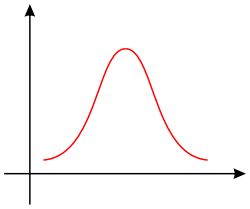


www-kanoon-ir

ث)



ج) اگر تعداد داده‌ها زیاد شود نمودار چندبر به شکل زیر می‌شود.



۱۲ بله: در نمونه‌گیری طبقه‌ای از هر طبقه متناسب با اندازهٔ، طبقه نمونه برمی‌داریم پس احتمال انتخاب واحدهای آماری در کل نمونه و در هر طبقه با هم برابر می‌باشد.

۱۳ روش اول:

برای برآورد میانگین داده‌ها می‌توانیم از میانگین داده‌های نمونه‌گیری‌شده استفاده کنیم

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{۵+۸+۹+۱۱+۱۲+۳+۷+۵+۲+۹}{۱۰} = \frac{۷۱}{۱۰} = ۷٫۱$$

روش دوّم:

داده‌ها را از کم به زیاد مرتب می‌کنیم و میانگین دو دادهٔ وسطی را حساب می‌کنیم.

$$۲, ۳, ۵, ۵, \underbrace{۷, ۸}, ۹, ۹, ۱۱, ۱۲$$

$$\bar{x} = \frac{۷+۸}{۲} = ۷٫۵$$

۱۴

$$\bar{x} - \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow \sigma = ۱٫۹ \; n = ۲۵$$

$$۲۲ - \frac{۲ \times ۱٫۹}{۵} \le \mu \le ۲۲ + \frac{۲ \times ۱٫۹}{۵} \Rightarrow ۲۱٫۲۴ \le \mu \le ۲۲٫۷۶$$

$$\mu \in [۲۱٫۲۴, ۲۲٫۷۶]$$

۱۵ الف) متغیّر وعده غذایی است که کیفی اسمی می‌باشد.

ب) پرسشنامه

پ) جامعهٔ آماری ۱۲۶۱ مشتری بوده پارامتر جامعه می‌تواند نسبت تعداد افرادی از جامعه که شام سفارش داده‌اند به کل اعضا و آماره می‌تواند همین نسبت در نمونهٔ مورد مطالعه باشد.