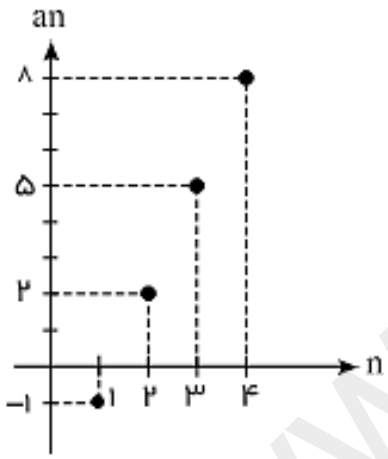
نام و نام خانوادگی: تاریخ امتحان : ۱۴۰۲/۱۲/۰۷ نام دبیر : آقای اسلام گروه : ۱۲E	بسمه تعالی مدیریت آموزش و پرورش ناحیه ۲ شهری دبیرستان دخترانه غیر دولتی دکترحسابی (دوره دوم) میان نوبت دوم، سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ نام درس : ریاضی — مدت زمان : ۶۰ دقیقه	 شماره صندلی : صفحه ۱ از ۳

ردیف	سوالات	بارم
۱	با توجه به دنباله‌های $a_n = \frac{n+۶}{۳n-۲}$, $b_n = n^۲ - ۱$ حاصل عبارت $a_۲ + b_۴$ را به‌دست آورید.	۲
۲	با توجه به نمودار مقابل، ضابطهٔ دنباله را بیابید.  	۲
۳	الف) چهار جمله اول از دنبالهٔ زیر را بنویسید. ب) آیا این دنباله حسابی است؟ $\begin{cases} a_{n+۱} = -a_n + ۴ \\ a_۱ = -۲ \end{cases}$	۲

www-kanoon-ir

۴	یازدهمین جملهٔ یک دنبالهٔ حسابی **۵۲** و جملهٔ نوزدهم آن **۹۲** است. جملهٔ سی‌اُم این دنباله را مشخص کنید.	۲
۵	اگر تابع f مدل ریاضی هرکدام از مسائل زیر باشد، دامنهٔ هرکدام از آنها را مشخص کنید. الف) کاهش دمای هوا با دور شدن از سطح زمین تا ارتفاع **۱۵** کیلومتر ☐ $\mathbb{N}$ ☐ $\mathbb{R}$ ب) میزان استفادهٔ دانش‌آموزان یک مدرسه از اینترنت در هر یک ساعت ☐ $\mathbb{N}$ ☐ $\mathbb{R}$ ج) حجم مکعبی به ضلع x ☐ $\mathbb{N}$ ☐ $\mathbb{R}$ د) تغییرات سطح دریاچهٔ ارومیه در بیست سال اخیر ☐ $\mathbb{N}$ ☐ $\mathbb{R}$ هـ) میزان مصرف ماهیانهٔ آب در یک واحد مسکونی ☐ $\mathbb{N}$ ☐ $\mathbb{R}$	۲
۶	بین دو عدد **۱۷** و **۳۳** سه عدد به گونه‌ای درج کرده‌ایم که چهار عدد حاصل تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند (با فرض $a_1 = ۱۷$)، اختلاف مشترک را بیابید.	۲
۷	در دنبالهٔ حسابی زیر، مجموع جملات داده شده را بیابید. ۵, ۱۲, ۱۹, ... , ۱۰۳	۲

www-kanoon.ir

۸	نخستین جملهٔ یک دنبالهٔ هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنبالهٔ هندسی $\frac{۱}{۲}$ است. کدام جملهٔ دنباله برابر ۶ است؟ مجموع جملات این دنباله از ۱۵۳۶ تا عدد ۶ را به دست آورید.	۲
۹	جملهٔ سوم یک دنبالهٔ هندسی ۲۷ و جملهٔ پنجم همین دنباله ۲۴۳ است. جملهٔ هفتم این دنباله هندسی را به دست آورید.	۲
۱۰	اگر $x+۳$ و $x+۲$ و x سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، مقدار x را به دست آورید.	۲

www.kanoon.ir

«موفق باشید»

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ پاسخ: در a_n مقدار $n=۲$ و در b_n مقدار $n=۴$ را جایگزین می‌کنیم:

$$a_۲=\frac{۲+۶}{۳\times ۲-۲}=۲\ ,\ \ b_۴=۴^۲-۱=۱۵\Rightarrow a_۲+b_۴=۲+۱۵=۱۷$$

۲ ابتدا جدول مقادیر n و a_n را تشکیل می‌دهیم:

n	۱	۲	۳	۴
a_n	-۱	۲	۵	۸

با توجه به دنبالهٔ $-۱, ۲, ۵, ۸, \cdots$ می‌توان فهمید جملات دنباله نسبت به جملهٔ قبلی خود ۳ واحد اضافه می‌شوند. بنابراین این دنباله به صورت $۳n+a$ است.

حال با جایگذاری $(n=۱, a_۱=-۱)$ در رابطهٔ $a_n=۳n+a$ مقدار a را می‌یابیم:

$$a_n=۳n+a\xrightarrow{n=۱}a_۱=۳(۱)+a\xrightarrow{a_۱=-۱}-۱=۳+a\Rightarrow a=-۴$$

بنابراین ضابطهٔ این دنباله به صورت $a_n=۳n-۴$ است.

۳ الف) برای به‌دست آوردن جمله‌های دوم تا چهارم به‌جای n در ضابطهٔ دنباله (رابطهٔ بازگشتی) مقادیر $n=۱, ۲, ۳$ را جایگزین می‌کنیم. بنابراین: $-۲, ۶, -۲, ۶$

ب) چون اختلاف دو جملهٔ متوالی مقدار ثابتی نیست، پس دنباله حسابی نیست.

۴ با داشتن جملهٔ یازدهم و نوزدهم، جملهٔ اول و اختلاف مشترک را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} a_{۱۱}=۵۲\Rightarrow a_۱+(n-۱)d=۵۲\Rightarrow a_۱+(۱۱-۱)d=۵۲\Rightarrow a_۱+۱۰d=۵۲ \\ a_{۱۹}=۹۲\Rightarrow a_۱+(n-۱)d=۹۲\Rightarrow a_۱+(۱۹-۱)d=۹۲\Rightarrow a_۱+۱۸d=۹۲ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow a_{۱۹}-a_{۱۱}=a_۱+۱۸d-(a_۱+۱۰d)=۹۲-۵۲\Rightarrow ۸d=۴۰\Rightarrow d=۵$$

$$a_{۱۱}=۵۲\Rightarrow a_۱+۱۰d=۵۲\xrightarrow{d=۵}a_۱+۱۰(۵)=۵۲\Rightarrow a_۱+۵۰=۵۲\Rightarrow a_۱=۲$$

برای جملهٔ عمومی از طریق عبارت $a_n=a_۱+(n-۱)d$ داریم:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d\xrightarrow{d=۵}a_n=۲+(n-۱)۵=۲+۵n-۵=۵n-۳$$
$$\Rightarrow a_n=۵n-۳$$

جملهٔ ۳۰اُم برابر است با:

$$a_{۳۰}=۵(۳۰)-۳=۱۵۰-۳=۱۴۷$$

۵ الف) ارتفاع تا ۱۵ کیلومتر $(\mathbb{R})$

ب) استفاده از اینترنت در هر یک ساعت $(\mathbb{N})$

ج) ضلع x $(\mathbb{R})$

د) بیست سال اخیر $(\mathbb{N})$

هـ) شمارهٔ ماه‌های سال $(\mathbb{N})$

۶ اختلاف مشترک دنبالهٔ حسابی که m واسطهٔ حسابی بین جملات a و b آن درج کرده‌ایم برابر است با:

$$d=\frac{b-a}{m+۱}$$

پس با داشتن $a_۱=۱۷$ و $a_۶=۳۳$ داریم:

$$d=\frac{۳۳-۱۷}{۳+۱}=\frac{۱۶}{۴}=۴$$

اختلاف مشترک دنباله برابر ۴ است.

۷ برای به دست آوردن مجموع جملات از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$a_۱=۵,\quad d=۱۲-۵=۷$$

شماره جملهٔ $a_n=۱۰۳$ و تعداد جملات را به‌دست می‌آوریم:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow ۵+(n-۱)\times ۷\Rightarrow ۱۰۳=۷n-۲\Rightarrow n=\frac{۱۰۵}{۷}=۱۵$$

بنابراین مجموع ۱۵ جمله را می‌خواهیم حساب کنیم:

$$S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}(۲\times(۵)+(\cancel{۱۵-۱}^{۱۴})۷)$$
$$\Rightarrow S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}(۱۰+۱۴\times(۷))=\frac{۱۵}{۲}\times(۱۰+۹۸)=\frac{۱۵}{۲}\times(۱۰۸)=۱۵\times ۵۴=۸۱۰$$

پس مجموع جملات برابر است با:

www-kanoon-ir

$S_{۱۵} = ۸۱۰$

۸

جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی $a_n = a_۱ r^{n-۱}$ ، $a_n = ۶$

$$۶ = ۱۵۳۶ \times (\frac{۱}{۲})^{n-۱} \Rightarrow \frac{۱}{۲۵۶} = \frac{۱}{۲^{n-۱}} \Rightarrow ۲۵۶ = ۲^{n-۱}$$

$$\Rightarrow ۲^۸ = ۲^{n-۱} \Rightarrow n - ۱ = ۸ \Rightarrow n = ۹$$

جملهٔ نهم برابر ۶ می‌باشد.

مجموع n جملهٔ دنبالهٔ هندسی $S_n = a_۱ \times \frac{۱ - r^n}{۱ - r} \Rightarrow S_۹ = ۱۵۳۶ \times \frac{(۱ - (\frac{۱}{۲})^۹)}{۱ - \frac{۱}{۲}} = \cancel{۳۰۷۲^۶} \times \frac{۵۱۱}{\cancel{۵۱۲}} = ۳۰۶۶$

۹ جملهٔ سوم یک دنبالهٔ هندسی ۲۷ است:

$$a_n = a_۱ r^{n-۱} \Rightarrow a_۳ = ۲۷ \Rightarrow a_۱ r^۲ = ۲۷ \quad (۱)$$

و جملهٔ پنجم همین دنباله ۲۴۳ است:

$$a_۵ = ۲۴۳ \Rightarrow a_۱ r^۴ = ۲۴۳ \quad (۲)$$

دو طرف روابط (۱) و (۲) را برهم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۱}{r^۲} = \frac{۲۷}{۲۴۳} = \frac{۳^۳}{۳^۵} = \frac{۱}{۳^۲} \Rightarrow r = ۳$$

نسبت مشترک به دست آمده را در رابطهٔ (۱) جایگزین می‌کنیم:

$$a_۱ (۳)^۲ = ۲۷ \Rightarrow a_۱ = \frac{۲۷}{۹} = ۳$$

بنابراین جملهٔ هفتم برابر است با:

$$a_۷ = a_۱ r^۶ = ۳ \times ۳^۶ = ۳^۷ = ۲۱۸۷$$

۱۰ اگر a, b, c سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی باشند، همواره خواهیم داشت: $b^۲ = ac$ بنابراین:

$$(x + ۲)^۲ = x(x + ۳)$$

$$x^۲ + ۴x + ۴ = x^۲ + ۳x$$

$$x = -۴$$